FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 42; bonus: $0^\flat$; time: 60')

Nome: Θάνος **Gabarito**

20/04/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, etc.).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em cada folha de rascunho extra antes de usá-la.

IX. Entregue todas as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Lembram-se:

Definition. Seja $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ bijetora. Definimos sua função inversa $f^{-1} : B \to A$ pela

$$f^{-1}(y) = x \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = y.$$

Definition. Seja $f : A \to B$, e sejam subconjuntos $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Definimos:

$$f[X] \overset{\text{def}}{=} \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$$
$$f^{-1}[Y] \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) \in Y \,\}.$$

Lembrando a notação set-builder, temos as definições equivalentes:

$$y \in f[X] \overset{\text{def}}{\iff} (\exists x \in X)\,[\, f(x) = y \,]$$
$$x \in f^{-1}[Y] \overset{\text{def}}{\iff} f(x) \in Y.$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, desligue antes da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

GABARITO

(21) **D**

Definição. Sejam $f : A \to A$. O $x \in A$ é um *fixpoint* (*ponto fixo*) da f sse $f(x) = x$.

Seja $f : A \to A$, e seja F o conjunto de todos os fixpoints da f:

$$F = \{ x \in A \mid x \text{ é um fixpoint da } f \}.$$

Considere as afirmações: $f^{-1}[F] \subseteq F$ & $f^{-1}[F] \supseteq F$.

(7) **D1.** Prove uma das duas.

PROVA DA $f^{-1}[F] \supseteq F$.

Seja $p \in F$, ou seja p é um fixpoint da f.
Logo $f(p) = p$, e logo $f(p) \in F$ (pois $p \in F$).
logo $p \in f^{-1}[F]$ (def. $f^{-1}[F]$).

(7) **D2.** Mostre que a outra, em geral, não é válida:

REFUTAÇÃO.

Tome $A = \{0, 1\}$ e defina f pela $f(x) = 0$.
Nesse caso temos $F = \{0\}$, mas $f^{-1}[F] = \{0, 1\}$.

(7) **D3.** Agora supondo uma das afirmações seguintes

f é injetora; f é sobrejetora;

prove a afirmação que tu refutaste no **D2**.

PROVA SUPONDO QUE f É INJETORA .

Seja $a \in f^{-1}[F]$. Logo $f(a)$ é um fixpoint da f, ou seja, $f(f(a)) = f(a)$.
Agora, como f é injetora, temos $f(a) = a$, ou seja, a é um fixpoint também e logo $a \in F$.

(21) **E**

Seja conjunto $A \neq \emptyset$. Defina funções f, g com os tipos seguintes:

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrowtail \wp A \\ g &: \wp A \twoheadrightarrow A. \end{aligned}$$

(3) **E1.** Defina a $f : A \rightarrowtail \wp A$.

DEFINIÇÃO.

Seja $f : A \rightarrowtail \wp A$ definida pela

$$f(x) = \{x\}.$$

(3) **E2.** Prove que f é injetora.

PROVA.

Sejam $x, x' \in A$ tais que $f(x) = f(x')$.
Logo $\{x\} = \{x'\}$ (def. f).
Logo $x = x'$ (pela igualdade de conjuntos).

(3) **E3.** Demonstre que f não é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO.

Pela definição da f, nenhum ponto do seu domínio é mapeado no $\emptyset$:
para todo $a \in A$ temos $f(a) = \{a\} \neq \emptyset \in \wp A$.

(4) **E4.** Defina a $g : \wp A \twoheadrightarrow A$.

DEFINIÇÃO.

Seja $a_0 \in A$ ($A \neq \emptyset$). Defina a $g : \wp A \twoheadrightarrow A$ pela

$$g(X) = \begin{cases} x, & \text{se } X \text{ é o singleton } \{x\} \\ a_0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(4) **E5.** Prove que g é sobrejetora.

PROVA.

Seja $a \in A$. Observe que $g(\{a\}) = a$. Como $\{a\} \in \wp A$, temos que g é sobrejetora.

(4) **E6.** Demonstre que g não é injetora.

DEMONSTRAÇÃO.

Observe que $\emptyset, \{a_0\} \in \wp A$ e que $\emptyset \neq \{a_0\}$, mas mesmo assim $g(\emptyset) = a_0 = g(\{a_0\})$. Logo, g não é injetora.

Só isso mesmo.