FMC2, 2018.1
(Turmas do Thanos)

Provinha 0
(points: 0; bonus: $0^\flat$; time: 66'+33')

Alun∗: **Prof∗:**

21/02/2018

(Resolva todos os problemas.)

Instruções:

Modo aluno: Escreva teu nome no campo "Alun∗" em cima, e use a mesma caneta para responder em todos os problemas da prova.

No tempo determinado entregue tua prova para receber uma de outro aluno da turma.

Modo professor: Usando uma caneta de cor diferente daquela que teu aluno escolheu usar, escreva teu nome no campo "Prof∗" em cima, e corrija sua prova. Não escreva qual seria uma resposta correta, apenas identifique os erros, dando uma curta explicação quando possível.

Lembre-se:

Definição 1.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. O a *divide* o b (escrevemos $a \mid b$) sse[1] existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq = b$.

Definição 2.
Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ sse $m \mid a - b$.

[1] escrevemos *sse* como uma abreviação da frase *se e somente se*

A

Considere uma turma com 11 alunos. De quantas maneiras podemos escolher 4 deles para atuar numa peça tetral escrita para 4 personagens? (Cada aluno escolhido pode representar só uma personagem.)

RESPOSTA: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \qquad \Big(= P(11,4) \Big)$

B

B1. Escreva uma definição certa e formal (em português matemático) de "*ímpar*". Não assuma que o leitor já saiba o significado da palavra "*par*".

DEFINIÇÃO.

Um número inteiro x é *ímpar* sse existe inteiro k tal que $x = 2k + 1$.

B2. Usando uma fórmula de lógica, expresse o significado da frase *"nenhum inteiro é divisível por seu dobro"*.

FÓRMULA: $\neg\exists p(p \in \mathbb{Z} \wedge 2p \mid p)$

C

C1. Prove que para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos $a \mid a$;

PROVA.

Como $a \cdot 1 = a$ e $1 \in \mathbb{Z}$, temos $a \mid a$ pela Definição 1.

C2. Para quais inteiros a temos $a \mid 0$? Prove tua afirmação.

RESPOSTA & PROVA.

Pela **C1** já sabemos que tomando $a = 0$ a afirmação é válida.

Ainda mais, ela é válida para qualquer valor inteiro de a:

Tome $a \in \mathbb{Z}$. Para provar que $a \mid 0$ precisamos achar um inteiro q tal que $aq = 0$ (Definição 1). Tome $q = 0$ e observe que realmente $a0 = 0$.

D

Prove ou refuta as afirmações:

D1 Para todo $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n > 1$, se $a \equiv b \pmod{n}$ então $a \equiv b \pmod{7n}$.
PROVA OU REFUTAÇÃO.

Falso. Contraexemplo: tome $a = 2$, $b = 4$, $n = 2$. Realmente temos $2 \equiv 4 \pmod{2}$, mas $2 \not\equiv 4 \pmod{14}$.

D2 Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \pmod{42}$ então $a \leq 42$ ou $b \leq 42$.
PROVA OU REFUTAÇÃO.

Falso. Contraexemplo: sejam $a = b = 50$. Temos $a \equiv b \pmod{42}$, mas nem $a \leq 42$ nem $b \leq 42$.

D3 Sejam a, b, c, n inteiros com $n > 1$, tais que:

(i) $a \equiv b \pmod{n}$;

(ii) $b \equiv c \pmod{n}$.

Logo $c \equiv a \pmod{n}$.
PROVA OU REFUTAÇÃO.

Verdadeiro. Prova: pela (i) temos $n \mid a - b$ (usamos a Definição 2); similarmente temos $n \mid b - c$ pela (ii). Ou seja, existem inteiros q_1, q_2 tais que

$$\begin{aligned} nq_1 &= a - b \\ nq_2 &= b - c \end{aligned}$$

(usamos aqui a Definição 1). Somando por lados as duas equações temos

$$\begin{aligned} && nq_1 + nq_2 &= a - b + b - c, \\ \text{logo} && n(q_1 + q_2) &= a - c, \\ \text{logo} && n(-q_1 - q_2) &= c - a. \end{aligned}$$

Como $-q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, então $n \mid c - a$, ou seja, $c \equiv a \pmod{n}$.

I

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1. \tag{$*$}$$

PROVA.

Vou provar o teorema por indução no n.

Para $n = 0$ (base da indução), preciso verificar que os dois lados da $(*)$ são iguais. Realmente são:

$$\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0$$
$$F_{0+2} - 1 = F_2 - 1 = (F_1 + F_0) - 1 = (1 + 0) - 1 = 0.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1. \tag{H.I.}$$

Preciso provar que

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{(k+1)+2} - 1.$$

Realmente

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+1} F_i &= \left(\sum_{i=0}^{k} F_i\right) + F_{k+1} && \text{(def. de somatório)} \\ &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} && \text{(H.I.)} \\ &= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 && \text{(associatividade e comutatividade de } +\text{)} \\ &= F_{k+3} - 1. && \text{(def. de } F_n\text{),} \end{aligned}$$