FMC1, 2016.2 (Turmas do Thanos)

Prova 4 (points: 200/100; bonus: $33^\flat$; time: 100')

Nome:

16/12/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\,[\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

X. Os pontos bônus duma unidade são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Esclarecimentos:

1. Podes deixar fatoriais ($n!$), permutações ($P(n,r)$) e combinações ($C(n,r)$) nos teus cálculos.
2. Nas "respostas" *não* precisa explicar teu raciocínio, mas *não escreva apenas um valor final*; Exemplo: $9!C(9,5)$ é aceitavel como resposta, mas seu valor 45722880 sem explicação, não!
3. Nas "resoluções" explique *curtamente* a ideia da tua resolução.

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota final de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(16) **A**

Escolhe exatamente um dos Aa e Ab.
(Quem responde nos dois, ganhará 0 pontos.)

Os *números Fibonacci* são definidos recursivamente assim:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

(16) **Aa.** Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

PROVA.

(16) **Ab.** Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Prova.

(10) **B**

Prove que:

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N} \textit{ e todo ímpar } k \in \mathbb{Z},\ k^n \textit{ é ímpar.}$$

PROVA.

(16) **C**

Sejam $a, m \in \mathbb{Z}$.

$$(a, m) = 1 \implies (\exists x \in \mathbb{Z})\big[ax \equiv 1 \pmod{m}\big].$$

Prova.

(20) **D**

(8) **D1.** Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$, se $3 \nmid n$ então $3 \mid n^2 - 1$.
PROVA.

(12) **D2.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prove que

$$a \mid b + c \ \ \& \ \ a \mid 2b + 3c \implies a \mid 3b + 2c.$$

(Podes usar propriedades da divisibilidade que provamos nas aulas.)
PROVA.

(28) **E**

(14) **E1.** Sem usar o teorema fundamental da aritmética, prove o lema de Euclides:
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.
PROVA.

(14) **E2.** Prove o teorema de Euclides: *existe uma infinidade de primos.*
PROVA.

(16) **F**

Prove que cada $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ pode ser escrito como produtório de primos.

Dica: PIFF ou PBO.

PROVA.

(28) **G**

Numa turma de 28 alunos, precisamos formar 2 comissões de 5 e 6 membros. Cada comição tem seu presidente, seu vice-presidente, e seus membros normais. De quantas maneiras podemos formar essas comissões. . .

(8) **G1.** . . . sem restrições (cada um aluno pode participar nas duas comissões simultaneamente)?
Resposta.

(8) **G2.** . . . se nenhum aluno pode participar simultaneamente nas duas comissões?
Resposta.

(12) **G3.** . . . se os dois (únicos) irmãos entre os alunos não podem participar na mesma comissão?
Resposta.

$(66 + 33^\flat)$ **Ω**

Xÿźźÿ o Mago Bravo decidiu matar todos os lemmings que ele guarda no seu quintal. Seus feitícios são os:

- `MM`: "magic missile", que mata 2 lemmings simultaneamente, e gasta 1 ponto "mana";
- `FB`: "fireball", que mata 3 lemmings simultaneamente, e gasta 2 pontos "mana".

Alem dos feitícios, Xÿźźÿ pode usar seu bastão para matar os lemmings (que não custa nada, e mata 1 lemming com cada batida). Suponha que o mago *nunca* vai lançar um feitício que mataria mais lemmings do que tem (ou seu quintal vai se queimar).

Ele tem m pontos "mana" e existem n lemmings no seu quintal.

Definindo certas funções para contar, responda nas perguntas:

Em quantas maneiras diferentes ele pode destruir todos os lemmings se...

(28) **Ω1.** ...os lemmings são indistinguíveis?

Resolução.

(38) **Ω2.** . . . os lemmings são distinguíveis?
Resolução.

(33$^\flat$) **Ω3.** . . . os lemmings são distinguíveis e cada vez que Xÿźźÿ mata um usando seu bastão, ele *ganha* um ponto de "mana"?
Resposta.

Só isso mesmo. Até FMC2!

Rascunho

RASCUNHO

Rascunho