FMC1, 2016.2
(Turmas do Thanos)

Provinha 1.0
(points: 34/100; bonus: $21^\flat$; time: 100')

Nome: **Turma:**

02/09/2016

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\, [\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC1})]$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho antes de usá-la.

VIII. Entregue *todas* as folhas de rascunho juntas com tua prova.

IX. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor já desistir.

$(18 + 12^\flat)$ **A**

(1) **A0.** Dar uma definição certa e formal (em português!) do que significa que

o inteiro n é ímpar.

Não assume que o leitor já saiba o significado da palavra "*par*".

Definição.

$(4^\flat)$ **A1.** Sejam as fórmulas

$$A = \exists x\,(P(x) \land Q(x)) \qquad C = \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$
$$B = \exists x P(x) \land \exists x Q(x) \qquad D = \forall x P(x) \lor \forall x Q(x).$$

Prove que $A \not\equiv B$:

e $C \not\equiv D$:

Dica: *Criar um mundo onde uma das duas fórmulas é verdadeira, e a outra falsa.*

$(8+8^\flat)$ **A2.** Escrevendo uma fórmula de lógica, definir os predicados

$$\begin{aligned} \mathrm{Even}(n) &\iff n \text{ é par} & \mathrm{Nat}(n) &\iff n \in \mathbb{N} \\ \mathrm{Square}(n) &\iff \sqrt{n} \in \mathbb{Z} & \mathrm{Leq}(x,y) &\iff x \leq y \\ \mathrm{Div}(a,b) &\iff a \text{ divide } b & \mathrm{Prime}(p) &\iff p \text{ é primo.} \end{aligned}$$

Considere que o universo é o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Tu podes usar:

- os símbolos lógicos $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$;
- a igualdade $=$;
- as parenteses '(' e ')';
- as variáveis $a, b, c, \ldots, x, y, z$;
- os seguintes símbolos-funções: addição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$;
- os constantes ("nomes") dos inteiros: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$;
- o símbolo-predicado $<$ da ordem estrita dos inteiros;
- *nada* mais![3]

Bonus: $(\times 2)$ se conseguir resolver sem usar nem constantes nem o $<$.

$\mathrm{Even}(n) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

$\mathrm{Square}(n) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

$\mathrm{Div}(a,b) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

$\mathrm{Nat}(n) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

$\mathrm{Leq}(x,y) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

$\mathrm{Prime}(p) \overset{\triangle}{\iff}$ $\boxed{}$

[3] Se tu quiseres usar qualquer outra coisa, abreviação, *etc.*, tu tens que a definir primeiro *usando apenas o que foi permitido*. Depois da sua definição, tu podes usá-la.

(9) **A3.** Definindo (em português!) predicados adequados, traduza as seguintes frases para fórmulas de lógica de predicados, onde o universo é o conjunto de todos os animais.[4]

PREDICADOS:

Dica: Define os predicados $J(x)$, $P(x)$, $F(x)$, $C(x)$, $A(x, y)$, e $T(x, y)$.

FRASES:

(i) Existem joaninhas sem pintas.

(ii) Todos os cachorros exceto o Argos são feios.

(iii) x ama pelo menos duas joaninhas.

(iv) Snoopy é o único cachorro que Eva não teme.

[4]Tente perder o menor possível da estrutura/lógica da cada frase nas tuas traduções.

$(16 + 9^\flat)$ **B**

$(\text{A0} \Rightarrow 4^\flat)$ **B0.** Assumindo apenas tua definição de "ímpar" no A0, prove que:

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N}, \textit{ e todo ímpar } k \in \mathbb{Z}, \ k^n \textit{ é ímpar}.$$

PROVA.

(B0 $\Rightarrow 9^\flat$) **B1.** Considere as funções q, r e t definidas recursivamente:

$$
\begin{array}{rclcrclcrcl}
q & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \quad & r & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \quad & t & : & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{B} \\
q(0) & = & 0 & & r(0) & = & 0 & & t(0,0) & = & \mathsf{True} \\
q(1) & = & 0 & & r(1) & = & 1 & & t(0,Sn) & = & \mathsf{False} \\
q(2) & = & 0 & & r(2) & = & 2 & & t(Sm,0) & = & \mathsf{False} \\
q(n+3) & = & q(n)+1 & & r(n+3) & = & r(n) & & t(Sm,Sn) & = & t(m,n)
\end{array}
$$

O que cada função calcula? (Pode ser em português ou em matemática.)

$q(n)$

$r(n)$

$t(m,n)$

Dica: *Calcule os valores $q(11)$, $q(12)$, $r(11)$, e $r(12)$.*

(12) **B2.** Os *números Fibonacci* e os *números Lucas* são definidos recursivamente assim:

$$F_0 = 0 \qquad\qquad L_0 = 2$$
$$F_1 = 1 \qquad\qquad L_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad\qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Para $n \geq 1$, seja $\ell : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ a função definida pela equação

$$\ell(n) = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Prove que para todo $n \geq 1$, $L_n = \ell(n)$.

PROVA.

Só isso mesmo.