FMC2, 2016.1
(Turma do Thanos)

Prova 4
(pts: (100,110,120), max: $(100, 100, 100)$)

Nome:

Axiomas ZFC

Extensionality.

$$\forall x \forall y\, (x = y \leftrightarrow \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists x \forall y (y \notin x) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall x \forall y \exists p \forall w\, (w \in p \leftrightarrow (w = x \lor w = y)) \tag{ZF3}$$

Separation (scheme). Para qualquer formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall x \exists s \forall w\, (w \in s \leftrightarrow (w \in x \land \varphi(w))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall x \exists p \forall w\, (w \in p \leftrightarrow w \subseteq x) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall x \exists u \forall w\, (w \in u \leftrightarrow \exists s (s \in x \land w \in s)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists w\, (\emptyset \in w \land \forall x (x \in w \to x \cup \{x\} \in w)) \tag{ZF7}$$

Replacement (scheme). Para qualquer function-like[1] fórmula $\varphi(x, y)$ o seguinte:

$$\forall d \exists c \forall s\, (s \in c \leftrightarrow (\exists e \in d)[\varphi(e, s)]) \tag{ZF8}$$

Foundation.

$$(\forall x \neq \emptyset)(\exists m \in x)[x \cap m = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Choice. *Seja $\mathscr{F}$ família de conjuntos não vazios.*

$$\textit{Então existe função } \varepsilon : \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F}, \textit{ tal que para todo } A \in \mathscr{F},\ \varepsilon(A) \in A. \tag{AC}$$

[1] Uma fórmula $\varphi(x, y)$ é *function-like*, se:

$$\forall x \exists! y [\varphi(x, y)] \qquad \text{ou seja,} \qquad \forall x \exists y \big[\varphi(x, y) \land \forall y' [\varphi(x, y') \to y = y']\big].$$

Nesse caso, também usamos o termo *class function*, e a notação comum $\varphi(x) = y$, para significar que o par (x, y) satisfaz a φ, ou seja, que a fórmula $\varphi(x, y)$ é verdadeira.

(100) A (Escolhe 2 dos 3.)

(50) **A1.** Prove as relações: $\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2$, e $\mathbb{N} <_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \mathbf{2})$. (Onde $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.)

(50) **A2.** Descreva o paradoxo do Russell (mostrando quais axiomas/princípios são assumidos) e explique a resolução do Zermelo.

(50) **A3.** Prove que para todo conjunto A, $A <_{\mathrm{c}} \mathcal{P}(A)$. (Dica: O $\leq_{\mathrm{c}}$ é fácil. Para o $\neq_{\mathrm{c}}$, suponha que existe sobrejetora $f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$ e, olhando para os vários subconjuntos de A, ache um absurdo.)

(110) B (Sem escolha.)

(24) **B1.** Prove pelos axiomas que com o operador de par ordenado do Kuratowski

$$(u, v) \triangleq \{\{u\}, \{u, v\}\},$$

se a e b são conjuntos, o produto cartesiano

$$a \times b \triangleq \{(x, y) \mid x \in a \land y \in b\}$$

também é.

(54) **B2.** Considere o axioma seguinte:

Triset axiom.

$$\forall x \forall y \forall z \Big((x \neq y \land y \neq z \land z \neq x) \to \exists t \forall w (w \in t \leftrightarrow w = x \lor w = y \lor w = z) \Big) \qquad \text{(ZF3*)}$$

(36) (i) Prove que no sistema ZF1+ZF2+ZF3+ZF4+ZF5+ZF6, podemos substituir o axioma Pairset (ZF3) pelo axioma Triset (ZF3*) "sem perder nada". Em outras palavras, *prove que no sistema*

$$\text{ZF1+ZF2+ZF3*+ZF4+ZF5+ZF6},$$

para todos os conjuntos a e b, existe o pairset deles $\{a, b\}$. (Dica: (ii))

(18) (ii) Podemos provar a mesma coisa no sistema

$$\text{ZF1+ZF2+ZF3*+ZF4+ZF6?}$$

Se sim, prove. Se não, explique porque. (Dica: (i))

(32) **B3.** Mostre que o (AC) é equivalente com o seguinte axioma:[2]

$\Rightarrow$: 10 *Sejam A e B conjuntos e relação $R \subseteq A \times B$ tal que $(\forall a \in A)(\exists b \in B)[a \mathrel{R} b]$.*

$\Leftarrow$: 22 *Então existe função $f : A \to B$ tal que $x \mathrel{R} f(x)$.* $\qquad (\mathrm{AC_R})$

(Sim, esse foi o "**D2**" da Prova 2′...)

[2] Trabalhando com relações, as três notações são equivalentes:

$$(x, y) \in R \iff R(x, y) \iff x \mathrel{R} y.$$

(120) C

(60) **C1.** Sejam os posets:

$$Y = \mathbf{2} \oplus \overline{\mathbf{2}} \qquad P = \omega \cdot Y \qquad Q = Y \cdot \omega \qquad Q' = (Y^{\partial}) \cdot \omega,$$

onde $\cdot$ o produto com a ordem antilexicográfica.

(26) (i) Desenha seus diagramas Hasse. (Dica: Dá nomes bonitos nos pontos dos diagramas.)

(8) (ii) Verifique se são reticulados.

(6) (iii) Ache todos os elementos do $\mathcal{O}(Y)$.

(12) (iv) Ache order-embeddings $\phi : Q \hookrightarrow Q'$, $\psi : (\omega \cdot 2 + 1) \hookrightarrow P$.

(8) (v) Mostre que $Q \not\cong Q'$.

(36) **C2.** Sejam $R \neq \emptyset$ conjunto e $0_R, 1_R \in R$ dois elementos dele com $0_R \neq 1_R$. Suponha que no R são definidas as operações

$$- : R \to R \qquad + : R^2 \to R \qquad \cdot : R^2 \to R$$

tais que:

$a + b \in R$	(RA0)	$a \cdot b \in R$	(RM0)
$a + (b + c) = (a + b) + c$	(RA1)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	(RM1)
$a + 0_R = a = 0_R + a$	(RA2)	$a \cdot 1_R = a = 1_R \cdot a$	(RM2)
$a + (-a) = 0_R = (-a) + a$	(RA3)		
$a + b = b + a$	(RA4)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	(RD)

Prove (passo a passo) que:

(i) $a \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot a$; (ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$; (iii) $(-1_R) \cdot a = -a$.

(Dica: Lembre umas propriedades de grupos.)

(24) **C3.** Seja G grupo, e H, K subgrupos de G. Definimos

$$HK \triangleq \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}.$$

*Escolhe e prove **uma** direção* na seguinte equivalência:

$$HK = KH \iff HK \text{ subgrupo de } G.$$

Boas provas!