FMC2, 2016.1 (Turma do Thanos)

Prova 2' (2.8 pts, max: 2.8)

Nome:

Axiomas ZFC

Extensionality.

$$\forall x \forall y\,(x = y \leftrightarrow \forall w(w \in x \leftrightarrow w \in y)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists x \forall y (y \notin x) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall x \forall y \exists p \forall w\,(w \in p \leftrightarrow (w = x \lor w = y)) \tag{ZF3}$$

Separation (scheme). Para qualquer formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall x \exists s \forall w\,(w \in s \leftrightarrow (w \in x \land \varphi(w))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall x \exists p \forall w\,(w \in p \leftrightarrow w \subseteq x) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall x \exists u \forall w\,(w \in u \leftrightarrow \exists s(s \in x \land w \in s)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists w\,(\emptyset \in w \land \forall x(x \in w \to x \cup \{x\} \in w)) \tag{ZF7}$$

Replacement (scheme). Para qualquer function-like[1] fórmula $\varphi(x, y)$ o seguinte:

$$\forall d \exists c \forall s\,(s \in c \leftrightarrow (\exists e \in d)[\varphi(e, s)]) \tag{ZF8}$$

Foundation.

$$(\forall x \neq \emptyset)(\exists m \in x)[x \cap m = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Choice. *Seja $\mathscr{F}$ família de conjuntos não vazios.*

$$\textit{Então existe função } \varepsilon : \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F}, \textit{ tal que para todo } A \in \mathscr{F},\ \varepsilon(A) \in A. \tag{AC}$$

---

[1]Uma fórmula $\varphi(x, y)$ é *function-like*, se:

$$\forall x \exists ! y [\varphi(x, y)] \qquad \text{ou seja,} \qquad \forall x \exists y \big[\varphi(x, y) \land \forall y' [\varphi(x, y') \to y = y']\big].$$

Nesse caso, também usamos o termo *class function*, e a notação comum $\varphi(x) = y$, para significar que o par (x, y) satisfaz a φ, ou seja, que a fórmula $\varphi(x, y)$ é verdadeira.

D (2.8 pts)

(0.6) **D0.** Sejam a, b conjuntos. Mostre pelos axiomas que as classes

$$C = \{\{x, \{x, y\}\} \mid x \in a \land y \in b\}$$
$$D = \big\{\{x, y\} \mid \big(x \in a \lor x \in \bigcup a\big) \land (y \in b \lor y \subseteq b)\big\}$$

são conjuntos, mas não a classe

$$Z = \big\{\bigcap\bigcap z \mid z \neq \emptyset \land \bigcap z \neq \emptyset\big\}.$$

(1.1) **D1.** Seja a conjunto. *Sem usar* o ZF4, mostre pelo resto dos axiomas que as classes seguintes são conjuntos:

$$E = \big\{\big\{x, \bigcup x, \mathcal{P}x\big\} \mid x \in a\big\}$$
$$F = \{x \mid x \subseteq a \land x \neq a\}$$
$$G = \big\{x \mid x \neq \emptyset \land x = \bigcap x\big\}.$$

(1.1) **D2.** Mostre que o AC é equivalente com o seguinte axioma:[2]

Sejam A e B conjuntos e relação $R \subseteq A \times B$ tal que $(\forall a \in A)(\exists b \in B)[A\ R\ B]$.

$$\textit{Então existe função } f : A \to B \textit{ tal que } x\ R\ f(x). \qquad (\mathrm{AC_R})$$

Boas provas!

[2]Trabalhando com relações, as três notações são equivalentes:

$$(x, y) \in R \iff R(x, y) \iff x\ R\ y.$$