FMC2, 2016.1

(Turma do Thanos)

Prova 2

(11.2 pts, max: 10.0)

Nome:

Boas provas!

Axiomas da teoria de conjuntos

Extensionality.

$$\forall x \forall y \, (x = y \leftrightarrow \forall w (w \in x \leftrightarrow w \in y)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists x \forall y (y \notin x) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall x \forall y \exists p \forall w \, (w \in p \leftrightarrow (w = x \lor w = y)) \tag{ZF3}$$

Separation (scheme). Para qualquer formula $\varphi(x)$ o seguinte é um axioma:

$$\forall x \exists s \forall w \, (w \in s \leftrightarrow (w \in x \land \varphi(w))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall x \exists p \forall w \, (w \in p \leftrightarrow w \subseteq x) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall x \exists u \forall w \, (w \in u \leftrightarrow \exists s (s \in x \land w \in s)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists w \, (\emptyset \in w \land \forall x (x \in w \to x \cup \{x\} \in w)) \tag{ZF7}$$

Sistema de naturais Peano

O conjunto estruturado $(\mathbb{N}; 0, S)$ é um sistema de naturais se ele satisfaz os seguintes axiomas:

(P1) $\mathbb{N}$ é um conjunto tal que $0 \in \mathbb{N}$.
(P2) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(P3) $S : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$: $Sn = Sm \implies n = m$.
(P4) $(\forall n \in \mathbb{N})[Sn \neq 0]$.
(P5) Para todo $X \subseteq \mathbb{N}$, $\big(0 \in X \land (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \to Sn \in X]\big) \implies X = \mathbb{N}$

λ-calculus & combinators

Church numerals

$$\begin{aligned}
\underline{0} &\coloneqq \lambda f.\lambda x.x \\
\underline{1} &\coloneqq \lambda f.\lambda x.f\ x \\
\underline{2} &\coloneqq \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) \\
&\ \ \vdots \\
\underline{n} &\coloneqq \lambda f.\lambda x.\underbrace{f\ (f\ (f \cdots (f}_{n \text{ vezes}}\ x) \cdots)) \\
\texttt{succ} &\coloneqq \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\ (n\ f\ x)
\end{aligned}$$

Combinators

$$\begin{aligned}
&\mathsf{I}\ x && \rhd\ x \\
&\mathsf{K}\ x\ y && \rhd\ x \\
&\mathsf{S}\ f\ g\ x && \rhd\ f\ x\ (g\ x) \\
&\mathsf{B}\ f\ g\ x && \rhd\ f\ (g\ x) \\
&\mathsf{W}\ f\ x && \rhd\ f\ x\ x \\
&\mathsf{C}\ f\ x\ y && \rhd\ f\ y\ x
\end{aligned}$$

A (4.9 pts)

(1.2) **A0.** Sejam a, b, e c conjuntos. Mostre pelos axiomas[1] que os seguintes também são:

(i) $a \cup \{a\}$

(ii) $a \triangle b = \{x \mid x$ pertence em exatamente um dos a e $b\}$

(iii) $\{a, b, c\}$

(1.2) **A1.** Sejam a e b conjuntos. Mostre pelos axiomas que:

(i) a classe $\{\{x, \{y\}\} \mid x \in a \wedge y \in b\}$ é conjunto;

(ii) a classe $\{\{x, y\} \mid x$ e y são conjuntos com $x \neq y\}$ *não* é conjunto. (Dica: absurdo)

(1.2) **A2.** Considere o axioma

Someset axiom: Existe um conjunto.

$$\exists x(x = x) \tag{ZF2*}$$

Prove que podemos substituir o axioma Emptyset (ZF2) pelo axioma Someset (ZF2*) "sem perder nada". Em outras palavras, prove que nesse sistema axiomático

ZF1+ZF2*+ZF3+ZF4+ZF5+ZF6

existe o $\emptyset$, indicando quais axiomas foram usados (e onde)). (Dica: é simples construir o $\emptyset$)

(1.3) **A3.** Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam n conjuntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Prove (pelos axiomas) que existe conjunto x tal que $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. (Dica: indução)

B (2.5 pts)

Para qualquer sistema de naturais $(\mathbb{N}; 0, S)$, definimos a operação de adição,

$$n + 0 = n \tag{a1}$$
$$n + Sm = S(n + m) \tag{a2}$$

e a relação de ordem:

$$n \leq m \overset{\triangle}{\iff} (\exists k)[n + k = m].$$

Sejam dois sistemas de naturais $(\mathbb{N}_1; 0_1, S_1)$ e $(\mathbb{N}_2; 0_2, S_2)$, suas operações de adição $+_1$ e $+_2$, e suas relações de ordem $\leq_1$ e $\leq_2$. Seja $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$ o isomorfismo definido pelo

$$\pi(0_1) = 0_2$$
$$\pi(S_1 n) = S_2(\pi(n)).$$

Sabemos que π respeita a operação $+$, ou seja: $\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m)$.

Mostre que π *respeita a ordem* também, ou seja:

$$n \leq_1 m \iff \pi(n) \leq_2 \pi(m).$$

(Dica: prove as duas direções da "$\iff$" separadamente.)

[1] indicando quais axiomas são usando e onde

C (3.8 pts)

(1.0) **C0.** Define as funções com equações (recursivas):

$$\begin{aligned} \mathit{drunk} &: [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \\ \mathit{countdown} &: \mathbb{N} \to [\mathbb{N}] \\ \mathit{pega} &: \mathbb{N} \to [\mathbb{N}] \to [\mathbb{N}] \end{aligned}$$

Exemplos de uso:

$$\begin{array}{lll} \mathit{drunk}\ [2,3,5] \quad = [2,2,3,3,5,5] & \mathit{countdown}\ 3 = [3,2,1,0] & \mathit{pega}\ 3\ [2,3,5,7,11] = [2,3,5] \\ \mathit{drunk}\ [1,9,8,3] = [1,1,9,9,8,8,3,3] & \mathit{countdown}\ 1 = [1,0] & \mathit{pega}\ 8\ [0,1,2,4] \qquad = [0,1,2,4] \end{array}$$

(0.8) **C1.** Calcule os "resultados" dos λ-terms:

(i) $(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$

(ii) $(\lambda xy.yxw)(\lambda x.u)(\lambda z.z)$

(1.0) **C2.** Mostre que:

(i) o combinator $\mathsf{S}\ \mathsf{K}\ (\mathsf{W}\ (\mathsf{I}\ \mathsf{B}))$ comporta como o I.

(ii) o combinator $\mathsf{C}\ (\mathsf{W}\ \mathsf{K})\ \mathsf{K}\ \mathsf{W}$ comporta como o I.

(1.0) **C3.** Suponha que já temos definido um λ-term `minus`, que comporta corretamente, no sentido que:

$$\mathtt{minus}\ \underline{n}\ \underline{m} \leadsto \begin{cases} \underline{n-m}, & \text{se } n \geq m \\ \underline{0}, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Explique o comportamento do termo seguinte, quando for aplicado para um numeral de Church $\underline{k}$ (qual é a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que o termo calcula?):

$$\mathtt{f} \coloneqq (\lambda n.\ n\ (\mathtt{minus}\ \underline{1})\ \underline{0})$$

(Dica: cuidado com Curry)

Só isso mesmo.