FMC2, 2018.1

(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1

(points: 158; bonus: $0^\flat$; time: 90’)

Nome:

02/07/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.**[4]

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

Infinity.

$$\exists i\, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

Definições:

$\wp A \overset{\text{def}}{=}$ O conjunto de partes de A

$\wp_f A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$

$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$

$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$

$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

${\downarrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$

${\uparrow} a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$

$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff}$ Os A, B são equinúmeros

$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\, (C \subseteq B \ \land\ A =_{\mathrm{c}} C)$

$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

D downset $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\, (\forall x \in P)\, [\, x \leq d \implies x \in D\,]$

U upset $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\, (\forall x \in P)\, [\, u \leq x \implies x \in U\,]$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\, ; \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1) Zero é um número natural: $\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2) O sucessor é uma operação unária nos naturais: $\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3) Naturais diferentes tem sucessores diferentes: $\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4) Zero não é o sucessor de nenhum natural: $\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5) Os naturais satisfazem o princípio da indução:

Princípio da indução: para todo $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n\, (n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

Cena 1.

Segunda-feira, madrugada.
Dois amigos, Áristos e Blammenos,
estão estudando para a prova de FMC2.
Eles estão tentando resolver o problema seguinte:
«O conjunto P de todos os programas de tipo Nat $\to$ Nat é contável?»

Áristos: "O conjunto P é contável, e aqui minha prova: o conjunto S de todos os strings feitos por um alfabeto finíto é contável, e todos os programas possíveis correspondem em apenas um subconjunto próprio de S (pois todo programa é um string, mas tem strings que não são programas). Logo, o P é contável."

Blammenos: "Então tu tá afirmando que existe enumeração do P? Eu vou chegar num absurdo com essa hipótese. Suponha $p_0, p_1, p_2, \dots$ uma enumeração de P. Eu defino o programa p_* com o algoritmo bem simples:

$$p_*(n) = p_n(n) + 1.$$

Agora temos $p_* \notin P$, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_* \neq p_n$."

Á: "Por quê?"

B: "Seja $n \in \mathbb{N}$. Eu vou lhe mostrar que $p_* \neq p_n$. Calculamos

$$\begin{aligned} p_*(n) &= p_n(n) + 1 && \text{(pela def. } p_*\text{)} \\ &\neq p_n(n) \end{aligned}$$

que mostra que $p_* \neq p_n$. Ou seja, p_* não é nenhum dos $p_0, p_1, \dots$ que a gente supôs que esses são todos os membros do P. Cheguei assim num absurdo, logo P é incontáv—"

Á: "Peraí, tu tá roubando! Como teu programa usou essa enumeração $p_0, p_1, \dots$? Se tu tivesse um algoritmo (programa) que gera essa seqüência, tu teria razão."

B: "Hmmm... Mas é fácil programar esse algoritmo! Concordas que podemos gerar facilmente todos os strings no S?"

Á: "Sim, esse programa que gera os strings, a gente já encontrou na aula."

B: "Bem, então meu algoritmo é o seguinte: gere todos os strings $s_0, s_1, s_2, \dots \in S$, mas para cada string que não é um programa, pula para o próximo. Esse programa gera sim a seqüência $p_0, p_1, p_2, \dots$ de todos os programas!"

Á: "Pqp, faz sentido! Não consigo achar um erro na tua prova, mas nem na minha!"

B: "Eu também não consigo achar um erro na tua prova!"

Um conjunto não pode ser contável e incontável, então pelo menos um dos dois alunos tá errado. Explique o(s) erro(s). Seguindo as suas idéias o que podemos concluir mesmo?

Resposta.

(42) **B**

Estudamos o parádoxo de Russell, e a resolução do problema por Zermelo: o princípio de comprehensão geral não é valido; usando o separation axiom evitamos cair no parádoxo. Mas o aluno Blammenos pensou:

> Blammenos: "Ok, eu vou trabalhar na teoria de Zermelo então. Seja A um conjunto. Defino o
>
> $$r(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in A \mid x \notin x \}$$
>
> que realmente é um conjunto, graças ao Separation (que usei-o com a fórmula $\varphi(x) := x \notin x$). Mas agora faço a mesma pergunta que Russell fez: $r(A) \in r(A)$? Assim consigo cair no mesmo parádoxo:
>
> $$r(A) \in r(A) \iff r(A) \notin r(A).$$
>
> Então Zermelo não resolveu o problema não!"

(24) **B1.** Explique o erro do aluno.
Resposta.

(18) **B2.** O aluno poderia, na verdade, em vez de concluir erronaemente que achou uma contradição, enunciar e provar um teorema. Qual seria o enunciado desse teorema?
Teorema.

(36) # C

Prove formalmente **exatamente um** dos teoremas seguintes de Cantor:

(24) TEOREMA 1. O conjunto $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{N} \to \{0,1\})$ é incontável.

(36) TEOREMA 2. Para todo conjunto A, $A <_{\mathrm{c}} \wp A$.

PROVA DO TEOREMA ________ .

(64) **D**

Escolhe **exatamente uma** das classes seguintes e prove pelos axiomas ZF1–ZF6 que é conjunto também. (Podes escrever tua construção em texto mesmo, ou em forma de árvore.)

(16) (i) Dados conjuntos a, b, c, d, a classe $A = \{a, b, c, d\}$

(20) (ii) Dados conjuntos a, b, c, d, a classe $B = \{a, b, \{c\}, \{d\}\}$

(24) (iii) Dado conjunto a, a classe $\mathcal{S}a \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \{w\} \mid w \in a \,\}$

(64) (iv) Dado conjunto a, a classe $\wp_{\mathrm{f}} a \stackrel{\text{def}}{=} \{\, w \mid w \text{ é um subconjunto finito de } a \,\}$

Dica: *Cuidado na (iv): estamos no ZF1–ZF6!*

Prova.

(42) **E**

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ conjuntos, onde $n \in \mathbb{N}$. Prove pelos axiomas ZF1–ZF6 que existe conjunto cujos membros são exatamente os $a_1, \ldots, a_n$.

Dica: *Indução!*

PROVA.

(28) # F

Escolha **exatamente um** dos **F1**, **F2** para resolver.

(18) **F1.** Sejam $\langle P \,;\, \leq \rangle$ um poset, $A \subseteq P$, e $m \in P$. Chamamos o m um *minimo* de A sse

$$m \in A \quad \& \quad (\forall a \in A)\,[\, m \leq a\,]\,.$$

Teorema (unicidade de min). Se um $A \subseteq P$ tem mínimo, então é único.

(28) **F2.** Sejam $\langle P_1 \,;\, \leq \rangle_1$ e $\langle P_2 \,;\, \leq \rangle_2$ posets e $\varphi : P_1 \to P_2$. Chamamos a φ um *ordem-isomorfismo* sse: (i) φ é bijetora; (ii) para todo $x, y \in P_1$,

$$x \leq_1 y \iff \varphi(x) \leq_2 \varphi(y).$$

Teorema (critérion de ordem-isomorfismo). Sejam $\langle P_1 \,;\, \leq \rangle_1$ e $\langle P_2 \,;\, \leq \rangle_2$ posets e $\varphi : P_1 \twoheadrightarrow P_2$ sobrejetora tal que para todo $x, y \in P_1$,

$$x \leq_1 y \iff \varphi(x) \leq_2 \varphi(y).$$

Então ϕ é um ordem-isomorfismo.
Prova de ________ .

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho