FMC2, 2018.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 3.1
(points: 158; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

02/07/2018

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo!

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Responda em até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$.**[4]

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bônus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que três problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\,(a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x(x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow \exists d(x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i\,(\emptyset \in i \land \forall x(x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Definições:

$\wp A \overset{\text{def}}{=}$ O conjunto de partes de A

$\wp_f A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$

$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$

$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$

$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

${\downarrow}a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\}$

${\uparrow}a \overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}$

$A =_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff}$ Os A, B são equinúmeros

$A \leq_{\text{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\,(C \subseteq B \ \land \ A =_{\text{c}} C)$

$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

D downset $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\,(\forall x \in P)\,[\,x \leq d \implies x \in D\,]$

U upset $\overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\,(\forall x \in P)\,[\,u \leq x \implies x \in U\,]$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessores diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: para todo $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n\,(n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Boas provas!

(52) **A**

Cena 1.

Segunda-feira, madrugada.

Dois amigos, Áristos e Blammenos,

estão estudando para a prova de FMC2.

Eles estão tentando resolver o problema seguinte:

[redacted]

Áristos: "[redacted] e [redacted] o [redacted] de [redacted] e [redacted] mas [redacted] o [redacted] é [redacted]."

Blammenos: "Então tu tá afirmando [redacted]? Eu vou chegar num absurdo com essa hipótese. [redacted]. [redacted] com [redacted]

[redacted]

[redacted], [redacted]."

Á: "Por quê?"

B: "[redacted]. [redacted]. [redacted]

[redacted] = [redacted] [redacted]

[redacted]

[redacted]. Ou seja, [redacted]. Cheguei assim num absurdo, logo [redacted]—"

Á: "Peraí, tu tá roubando! Como [redacted]? [redacted]"

B: "Hmmm... [redacted] Concordas que podemos [redacted]?"

Á: "Sim, [redacted] a gente já encontrou na aula."

B: "Bem, então [redacted], [redacted]. [redacted]!"

Á: "Pqp, faz sentido! Não consigo achar um erro na tua prova, mas nem na minha!"

B: "Eu também não consigo achar um erro na tua prova!"

[redacted] pelo menos um dos dois alunos tá errado. Explique o(s) erro(s). Seguindo as suas idéias o que podemos concluir mesmo?

Resposta.

(42) **B**

[redacted] Zermelo: [redacted]; usando o separation axiom [redacted]. Mas o aluno [redacted]:

> [redacted]: “Ok, [redacted] Defino o
>
> [redacted] $\overset{\text{def}}{=}$ [redacted]
>
> [redacted] Separation [redacted] $\varphi(x) :=$ [redacted]? [redacted]:
>
> [redacted]
>
> [redacted]”

(24) **B1.** Explique o erro do aluno.

Resposta.

(18) **B2.** O aluno poderia, na verdade, em vez de [redacted], [redacted]. [redacted]?

Teorema.

(36) **C**

Prove formalmente **exatamente um** dos [redacted]:

(24) TEOREMA 1. [redacted]

(36) TEOREMA 2. [redacted]

PROVA DO TEOREMA __________ .

(64) **D**

Escolhe **exatamente uma** das classes seguintes e prove pelos axiomas ZF1–ZF6 que é conjunto também. (Podes escrever tua construção em texto mesmo, ou em forma de árvore.)

(16) (i) [redacted]

(20) (ii) [redacted]

(24) (iii) [redacted]

(64) (iv) [redacted]

Dica: *Cuidado na (iv): estamos no ZF1–ZF6!*

PROVA.

(42) **E**

Sejam [redacted]. Prove pelos axiomas ZF1–ZF6 que [redacted].

Dica: *Indução!*

PROVA.

(28) **F**

Escolha **exatamente um** dos **F1**, **F2** para resolver.

(18) **F1.** Sejam $\langle P\ ;\ \leq \rangle$ um poset, $A \subseteq P$, [redacted]. [redacted] A [redacted]

[redacted]

Teorema [redacted]**.** Se [redacted], então [redacted].

(28) **F2.** Sejam $\langle P_1\ ;\ \leq \rangle_1$ e $\langle P_2\ ;\ \leq \rangle_2$ posets [redacted]. [redacted] [redacted]: [redacted]; [redacted] [redacted],

[redacted].

Teorema ([redacted]**).** Sejam [redacted] tal que para todo [redacted],

[redacted]

Então [redacted]

PROVA DE ________ .

Só isso mesmo.