FMC2, 2017.2
(Turmas T34&N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 128/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

08/12/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \rightarrow \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\,(a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i\,(\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Lembre-se:

$$\begin{aligned}
\wp A &\overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A \\
\wp_{\mathrm{f}} A &\overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\} \\
A^* &\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \\
\overline{n} &\overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \\
(A \to B) &\overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\} \\
{\downarrow} a &\overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid x \leq a\} \\
{\uparrow} a &\overset{\text{def}}{=} \{x \in P \mid a \leq x\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A =_{\mathrm{c}} B &\overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\ B \text{ são equinúmeros} \\
A \leq_{\mathrm{c}} B &\overset{\text{def}}{\iff} \exists C\,(C \subseteq B \ \land\ A =_{\mathrm{c}} C) \\
f : A \rightarrowtail B &\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B \\
f : A \twoheadrightarrow B &\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B \\
f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow B &\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B \\
D \text{ downset} &\overset{\text{def}}{\iff} (\forall d \in D)\,(\forall x \in P)\,[\,x \leq d \implies x \in D\,] \\
U \text{ upset} &\overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in U)\,(\forall x \in P)\,[\,u \leq x \implies x \in U\,]
\end{aligned}$$

Definição. Um *sistema Peano* é um conjunto estruturado $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N}\,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$ que satisfaz as leis:

(P1)	Zero é um número natural:	$\mathsf{0} \in \mathbf{N}$
(P2)	O sucessor é uma operação unária nos naturais:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
(P3)	Naturais diferentes tem sucessóres diferentes:	$\mathsf{S} : \mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{N}$
(P4)	Zero não é o sucessor de nenhum natural:	$\mathsf{0} \notin \mathsf{S}[\mathbf{N}]$
(P5)	Os naturais satisfazem o princípio da indução:	

Princípio da indução: *para todo* $X \subseteq \mathbf{N}$,

$$(\mathsf{0} \in X \land \forall n\,(n \in X \to \mathsf{S}n \in X)) \to X = \mathbf{N}.$$

Definição. Um poset $\mathcal{L} = \langle L\,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \lor y$ e $x \land y$, onde

$$x \lor y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\} \qquad\qquad x \land y \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$$

(24) **A**

Sejam conjuntos [redacted] tais que [redacted] e [redacted] $=_c$ [redacted].
Prove **exatamente uma** das 4 afirmações:

(8) (i) [redacted] $=_c$ [redacted]

(14) (ii) [redacted]

(18) (iii) [redacted] $=_c$ [redacted]

(24) (iv) [redacted]

Dica: Não use o *Schröder–Bernstein*.

Prova.

(32) **B**

Considere o axioma seguinte:

[redacted] (ZF3*)

(16) **B1.** No sistema [redacted], prove [redacted].
Prova.

(16) **B2.** Mostre que [redacted] no sistema [redacted].
Demonstração.

(36) C

Para qualquer sistema Peano $\mathcal{N} = \langle \mathbf{N} \,;\, \mathsf{0}, \mathsf{S} \rangle$, definimos as operações:

$$n + \mathsf{0} = n \quad \text{(a1)} \qquad\qquad n \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0} \quad \text{(m1)}$$

$$n + \mathsf{S}m = \mathsf{S}(n+m) \quad \text{(a2)} \qquad\qquad n \cdot \mathsf{S}m = (n \cdot m) + n \quad \text{(m2)}$$

Sejam [redacted], e [redacted] operações [redacted] [redacted] [redacted] e [redacted]. Seja [redacted] [redacted] definido recursivamente pelas

[redacted] = [redacted] (φ1)

[redacted] = [redacted] (φ2)

(18) **C1.** Prove que [redacted].

Dica: *Mostre que* [redacted].

PROVA.

(18) **C2.** Prove que [redacted], ou seja, [redacted],

[redacted].

PROVA.

(36) **D**

Sejam [redacted] um [redacted], [redacted]. Prove que as afirmações

(i) [redacted]

(ii) [redacted]

(iii) [redacted].

são equivalentes. Em cada parte escreva claramente qual das implicações tu tá provando.

Prova.

Só isso mesmo.