FMC2, 2017.2
(Turma ♣T34♣ do Thanos)

Prova 2
(points: 112/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

08/11/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ para resolver.**[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que 3 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembre-se:

Definição 1 (grupo; grupo abeliano; monóide). Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\,;\, e, *\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,(\exists y \in G)\,[\, y * a = e = a * y\,] \tag{G3}$$

Se $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G3) em cima e a

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b = b * a\,] \tag{G4}$$

chamamos o $\mathcal{G}$ *grupo abeliano*. Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo. Se o $\mathcal{G}$ satisfaz as (G0)–(G2) ele é um *monóide*.

Definição 2 (anel). Um conjunto estruturado $\mathcal{R} = \langle R\,;\, 0, 1, +, \cdot\rangle$ é um *anel* (com identidade) sse:

$$(\forall x, y \in R)\,[\, x + y \in R\,] \tag{A0}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x + (y + z) = (x + y) + z\,] \tag{A1}$$
$$(\forall x \in R)\,[\, 0 + x = x = x + 0\,] \tag{A2}$$
$$(\forall x \in R)\,(\exists y \in R)\,[\, y + x = 0 = x + y\,] \tag{A3}$$
$$(\forall x, y \in R)\,[\, x + y = y + x\,] \tag{A4}$$
$$(\forall x, y \in R)\,[\, x \cdot y \in R\,] \tag{M0}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,] \tag{M1}$$
$$(\forall x \in R)\,[\, 1 \cdot x = x = x \cdot 1\,] \tag{M2}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,] \tag{DL}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x\,] \tag{DR}$$

Denotamos o inverso de $x \in R$ garantido pela (A3) com $(-x)$. Se a $\cdot$ é comutativa, chamamos o $\mathcal{R}$ *anel comutativo*.

Definição 3. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \overset{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad AB \overset{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 4 (homomorfismo de grupo). Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\,;\, e_A, \cdot_A\rangle$ para o grupo $\langle B\,;\, e_B, \cdot_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que:

(i) para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$;

(ii) $\varphi(e_A) = e_B$;

(iii) para todo $x \in A$, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Definição 5 (subgrupo normal). Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G \ &\overset{\text{def}}{\iff} \text{ para todo } g \in G \text{ e } n \in N,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{ para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

(18) **A**

Dado um grupo *finito* G e $H \leq G$, definimos o *normalizer* de H no G como o conjunto:

$$N(H) \overset{\text{def}}{=} \left\{ g \in G \mid \text{para todo } h \in H,\ ghg^{-1} \in H \right\}$$

(9) **A1.** Mostre que $N(H) \leq G$.
Prova.

(9) **A2.** Mostre que $H \trianglelefteq N(H)$.
Prova.

(32) # B

Definition. Sejam G grupo e $H \subseteq G$. Chamamos o H *subgrupo* de G sse H é um grupo com a mesma operação de G. Escrevemos $H \leq G$.

(12) **B1. Criterion.** *Sejam G grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G$ tal que:*

(i) *H é fechado pela operação de G;*

(ii) *H é fechado pelos inversos de G.*

Então $H \leq G$.

PROVA.

(20) **B2. Criterion.** *Sejam G grupo e H um* finito e não vazio *subconjunto de G, tal que H é fechado pela operação de G. Então $H \leq G$.*

PROVA.

(32) **C**

Definition I (domínio de cancelamento). Um anel comutativo D tal que

$$\text{para todo } a, x, y \in D, \quad ax = ay \;\;\&\;\; a \neq 0 \implies x = y \tag{CL}$$

é chamado *domínio de cancelamento*.
Definition II (domínio de integridade). Um anel comutativo D tal que

$$\text{para todo } x, y \in D, \quad \text{se } xy = 0 \text{ então } x = 0 \text{ ou } y = 0 \tag{NZD}$$

é chamado *domínio de integridade*.
Fato. As definições I e II são equivalentes.
Definition III (corpo). Um anel comutativo F tal que

$$\text{para todo } a \in F \setminus \{0\}, \text{ existe } y \in F, \text{ tal que } ay = 1 = ya. \tag{M3}$$

é chamado *corpo*.

Critérion. *Se D é um domínio de integridade finito então D é um corpo.*

PROVA.

(24) **D**

Definition (homomorfismo de monóide). Sejam $\mathcal{M} = (M; \cdot_M, 1_M), \mathcal{N} = (N; \cdot_N, 1_N)$ monóides e $\varphi : M \to N$. A φ é um *homomorfismo de monóides* sse:

(i) para todo $x, y \in M$, $\varphi(x \cdot_M y) = \varphi(x) \cdot_N \varphi(y)$;

(ii) $\varphi(1_M) = 1_N$.

(12) **D1. Critérion.** *Sejam* $\mathcal{M} = (M; \cdot_M, 1_M), \mathcal{N} = (N; \cdot_N, 1_N)$ *monóides e* $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ *surjeção tal que*

$$\varphi(x \cdot_M y) = \varphi(x) \cdot_N \varphi(y) \quad \text{para todo } x, y \in M.$$

A φ *é um homomorfismo de monóides.*

Prova.

(12) **D2. Proposição.** Sejam $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ aneis e $f : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ um homomorfismo de aneis. Prove que para todo $k \in \ker f$ e todo $r \in R$, $kr \in \ker f$.

Prova.

(48) **E**

(24) **E1.** Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ grupos e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Prove que:

$$\varphi \text{ monomorfismo} \iff \ker \varphi = \{e_A\}.$$

PROVA.

(24) **E2.** Seja G grupo e defina a função $\varphi : G \to G$ pela $\varphi(x) = x^2$. Prove que:

$$\varphi \text{ homomorfismo} \iff G \text{ abeliano}.$$

PROVA.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho