FMC2, 2017.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.2
(points: 72/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

13/09/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Escolha até 3 dos E, F, G, H para responder.**[4]

Lembre-se a notação:

$(A \to B) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

$f[X] \stackrel{\text{def}}{=}$ a *imagem* de $X \subseteq \text{dom} f$ através da f

$f^{-1}[Y] \stackrel{\text{def}}{=}$ a *preimagem* de $Y \subseteq \text{cod} f$ através da f

$f : A \rightarrowtail B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \stackrel{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas nas 4 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **E**

(12) **E1.** Defina *completamente* o fecho reflexivo R_{r} e o fecho simétrico R_{s} duma relação R.
DEFINIÇÃO.

Seja A conjunto e R uma relação binária no A. Definimos as relações R_{r} e R_{s} pelas:

$$x \mathrel{R_{\mathrm{r}}} y \overset{\text{def}}{\iff} x \mathrel{R} y \quad \text{ou} \quad x = y$$
$$x \mathrel{R_{\mathrm{s}}} y \overset{\text{def}}{\iff} x \mathrel{R} y \quad \text{ou} \quad y \mathrel{R} x.$$

(12) **E2.** Seja $\sim$ uma relação de equivalência num conjunto A, e sejam $a, b \in A$. Prove que:

$$a \sim b \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset.$$

onde denotamos por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in A$ através da $\sim$. Seja específico nas tuas justificativas.
PROVA.

"$\Rightarrow$". Suponha que $a \sim b$. Precisamos achar um elemento que pertence nos dois conjuntos $[a]$ e $[b]$. Tome o proprio a. Temos $a \in [a]$ pois $a \sim a$ (pela reflexividade da $\sim$). Tambem temos $a \in [b]$, pois $a \sim b$ (hipótese). Logo $a \in [a] \cap [b] \neq \emptyset$.

"$\Leftarrow$". Suponha que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ e tome $w \in [a] \cap [b]$. Logo $w \in [a]$ e $w \in [b]$, ou seja $w \sim a$ e $w \sim b$ pela definição de classe de equivalência. Pela simetría da $\sim$ temos $a \sim w$. Agora como $a \sim w$ e $w \sim b$, pela transitividade da $\sim$ ganhamos o desejado $a \sim b$.

(24) **F**

(12) **F1.** Sejam $f : X \to Y$ e $\{B_n\}_n$ uma seqüência de subconjuntos de Y. Prove que:

$$f^{-1}\left[\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n]$$

PROVA.

"$\subseteq$". Seja $a \in f^{-1}[\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n]$. Logo $f(a) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(a) \in B_n$. Logo $a \in f^{-1}[B_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n]$.

"$\supseteq$". Seja $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n]$. Logo, $a \in f^{-1}[B_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $f(a) \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f(a) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$. Logo $a \in f^{-1}[\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n]$.

(12) **F2.** Seja $\epsilon > 0$ e defina a relação binária $\sim_\epsilon$ no $\mathbb{R}$ pela

$$x \sim_\epsilon y \overset{\text{def}}{\iff} |x - y| < \epsilon.$$

Ela é uma relação de equivalência?

PROVA/REFUTAÇÃO.

Não, pois ela não é transitiva. Como contraexemplo, tome os reais 0, $\epsilon/2$, e ϵ e observe que $0 \sim_\epsilon \epsilon/2$ e $\epsilon/2 \sim_\epsilon \epsilon$ mas mesmo assim não temos $0 \sim_\epsilon \epsilon$.

(24) **G**

(16) **G1.** Seja S o conjunto de todos os strings *não vazios* dum alfabeto Σ, com $|\Sigma| \geq 2$. Considere a função $f : S \times \{0,1\} \to S$ definida pela:

$$f(w,i) = \begin{cases} ww, & \text{se } i = 0 \\ w', & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

onde w' é o string reverso de w, e onde denotamos a concatenação de strings por juxtaposição.
(i) A f é injetora?
PROVA/REFUTAÇÃO.

Não. Tome uma letra do alfabeto $a \in \Sigma$ e observe que

$$f(a,0) = aa = f(aa,1).$$

Como $(a,0) \neq (aa,1)$, a f não é injetora.

(ii) A f é sobrejetora?
PROVA/REFUTAÇÃO.

Sim. Tome um aletorio string $w \in S$, e seja w' o string reverso de w. Temos

$$f(w',1) = (w')' = w.$$

(8) **G2.** Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as pessoas. Considere as relações no $\mathcal{P}$ definidas pelas

$$\mathrm{Parent}(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ é a mãe ou o pai de } y$$
$$\mathrm{Child}(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ é filho ou filha de } y.$$

Prove ou refute: $\mathrm{Child} \circ \mathrm{Parent} \overset{?}{=} \mathrm{Parent} \circ \mathrm{Child}$.
PROVA/REFUTAÇÃO.

Temos $\mathrm{Child} \circ \mathrm{Parent} \neq \mathrm{Parent} \circ \mathrm{Child}$.
Tome $x, y \in \mathcal{P}$ dois irmãos que não têm filhos (juntos). Logo

$$x\ (\mathrm{Parent} \circ \mathrm{Child})\ y \qquad \text{mas não} \qquad x\ (\mathrm{Child} \circ \mathrm{Parent})\ y.$$

Provamos assim que as duas relações são diferentes.

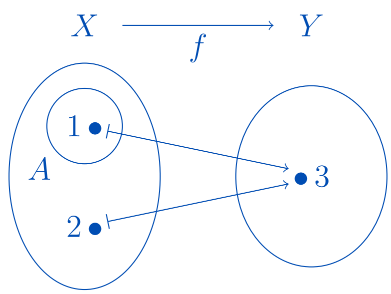
(24) **H**

(12) **H1.** Prove ou refute a afirmação seguinte: *para toda função* $f : X \to Y$, *se* $A \subseteq X$, *então*

$$f^{-1}[f[A]] = A.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é falsa. Contraexemplo:



Nesse exemplo temos: $A = \{1\}$; $f[A] = \{3\}$; e $f^{-1}[\{3\}] = \{1,2\}$. Logo

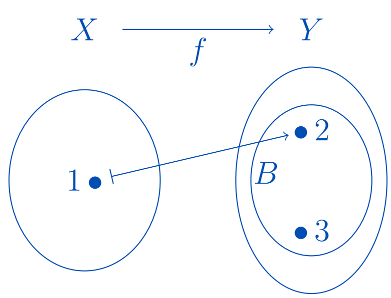
$$A = \{1\} \neq \{1,2\} = f^{-1}[f[A]].$$

(12) **H2.** Prove ou refute a afirmação seguinte: *para toda função* $f : X \to Y$, *se* $B \subseteq Y$, *então*

$$f\big[f^{-1}[B]\big] = B.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

A afirmação é falsa. Contraexemplo:



Nesse exemplo temos: $B = \{2,3\}$; $f^{-1}[B] = \{1\}$; e $f[\{1\}] = \{2\}$. Logo

$$B = \{2,3\} \neq \{2\} = f\big[f^{-1}[B]\big].$$

Só isso mesmo.