

---

Nome:

---

18/08/2017

### Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).<sup>1</sup>
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V.  $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$ .<sup>2</sup>
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.<sup>3</sup>
- XII. **Reponde em no máximo um dos problemas {B, C}**.<sup>4</sup>

*Boas provas!*

---

<sup>1</sup>Ou seja, *desligue antes* da prova.

<sup>2</sup>Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

<sup>3</sup>Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

<sup>4</sup>Provas com respostas nos dois problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

- (4) **A1.** Defina formalmente (usando ou “ $\dots \stackrel{\text{def}}{\iff} \dots$ ” ou “ $\dots \stackrel{\text{def}}{=} \dots$ ”) o operador unário  $\cap$  e a relação binária  $\subseteq$ .

DEFINIÇÃO DE  $\cap$ :

DEFINIÇÃO DE  $\subseteq$ :

- (6) **A2.** Sejam os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2\}; \quad B = \{1, 2, 3\}; \quad C = \{n - 1 \mid n \text{ é primo}\};$$

e para todo real  $\epsilon > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , sejam os intervalos de reais

$$I_\epsilon = [0, 1 + \epsilon) \\ U_n = [n, +\infty).$$

Calcule os conjuntos:

$$A \setminus B = \input{width=600px,height=25px}$$

$$A \triangle \emptyset = \input{width=600px,height=25px}$$

$$(A \triangle B) \times \{0\} = \input{width=600px,height=25px}$$

$$(A \cup B) \setminus C = \input{width=600px,height=25px}$$

$$\wp \emptyset = \input{width=600px,height=25px}$$

$$\bigcup_{\wp} \{\emptyset\} = \input{width=600px,height=25px}$$

$$\bigcap \{I_\epsilon \mid \epsilon > 0\} = \input{width=600px,height=25px}$$

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} U_n = \input{width=600px,height=25px}$$

- (2) **A3.** Ache conjunto finito e não vazio  $A$  tal que  $|A| < |\cap A| < |\cup A|$ .

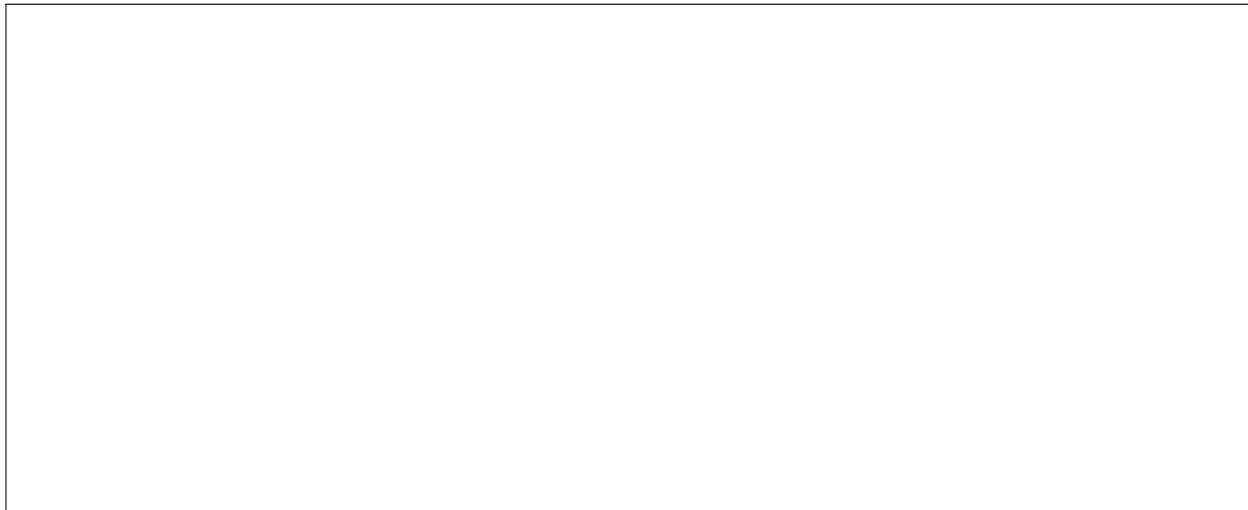
RESPOSTA.

(12) **B**

**B1.** Prove ou refuta a afirmação:

*para todos os conjuntos  $A, B, C$ , se  $A \subseteq B$  e  $A \subseteq C$ , então  $A \subseteq B \cap C$ .*

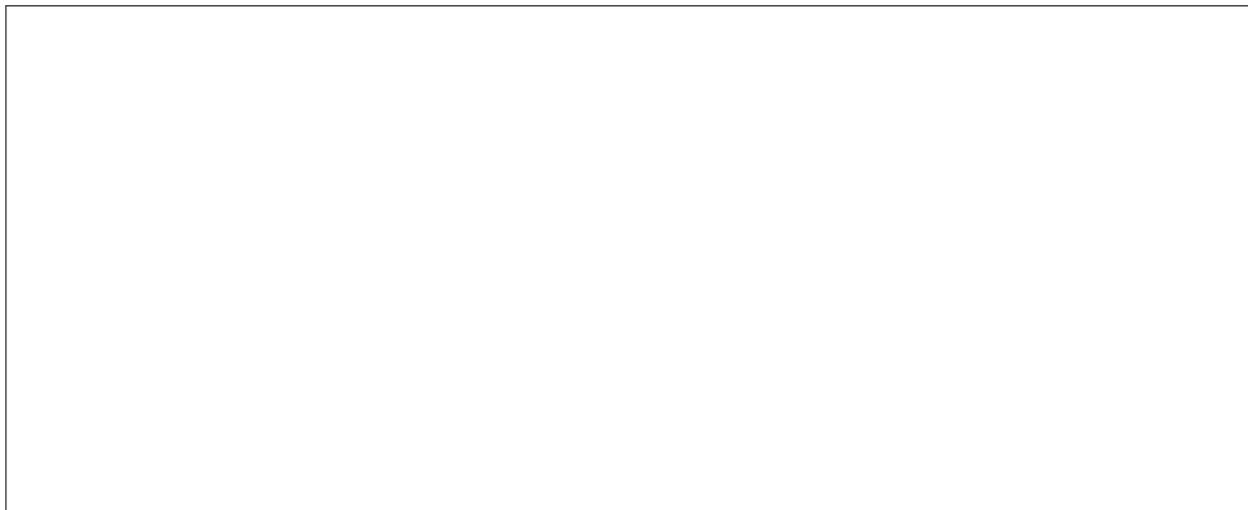
PROVA/REFUTAÇÃO.



**B2.** Prove ou refuta a afirmação:

*para todos os conjuntos  $A, B, C$ , se  $A \subsetneq B$  e  $A \subsetneq C$ , então  $A \subsetneq B \cap C$ .*

PROVA/REFUTAÇÃO.



(16) **C**

Sejam  $\{A_n\}_n$  e  $\{B_n\}_n$  duas seqüências de conjuntos, tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subsetneq B_{n+1}$ .

(8) **C1.** Prove que:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

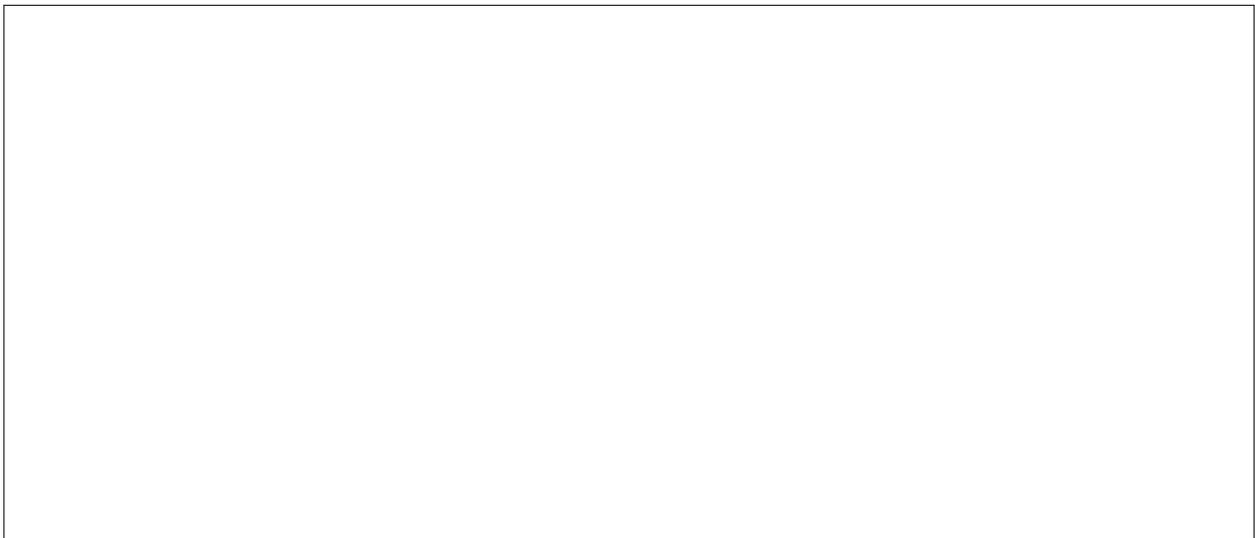
PROVA.



(8) **C2.** Mostre que, em geral, não podemos concluir que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subsetneq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

DEMONSTRAÇÃO.



(9<sup>b</sup>) **D**

Considere as linguagens **N** e **F** geradas pelas gramáticas

$$N ::= 0 \mid SN \qquad \text{e} \qquad F ::= A \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F)$$
$$A ::= p_0 \mid p_1 \mid p_2 \mid \dots$$

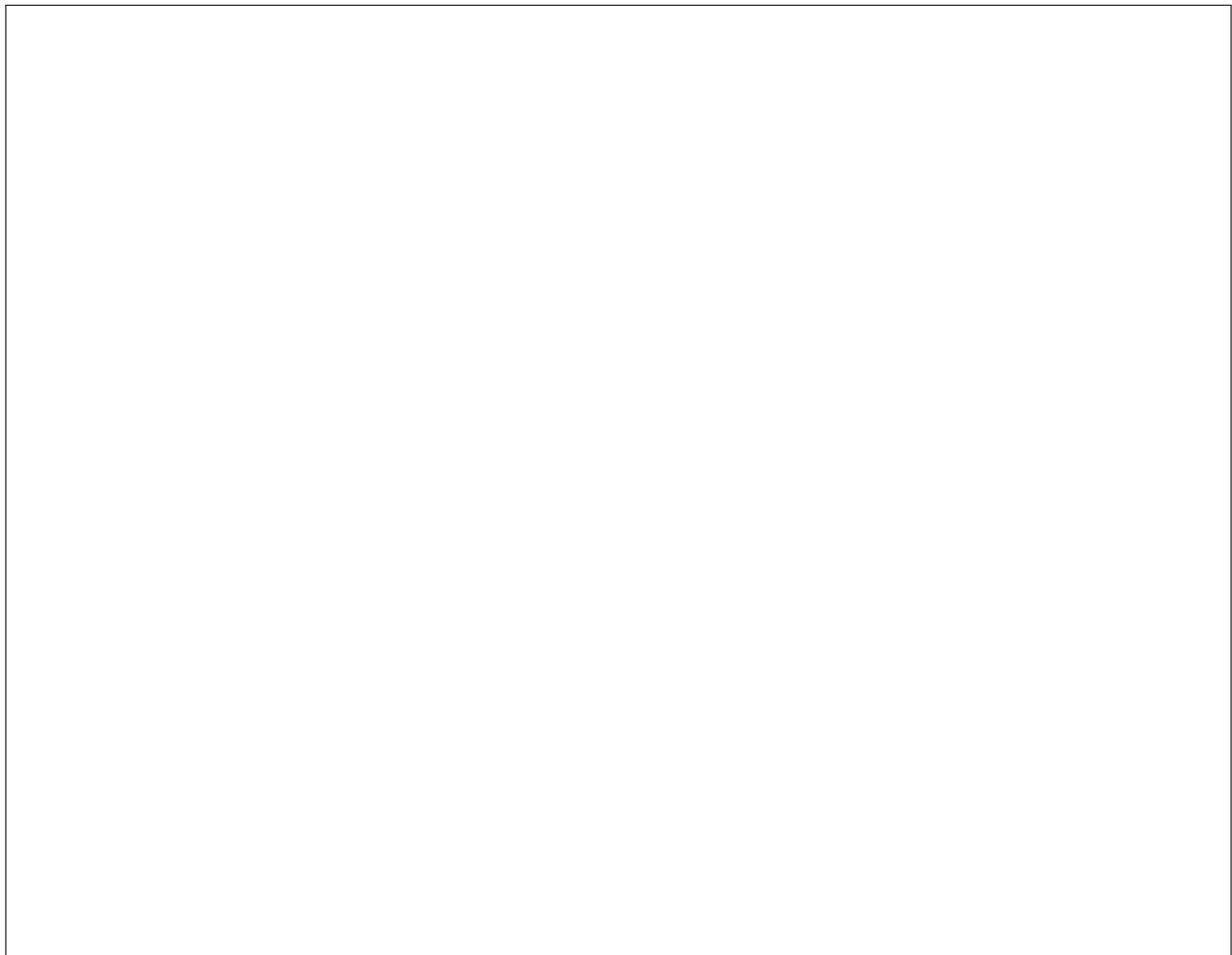
Defina recursivamente e *elementariamente*<sup>5</sup> as funções

$$\min : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \qquad \max : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \qquad \text{height} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{N}$$

onde as *min* e *max* retornam o mínimo e o máximo das suas entradas respectivamente, e a *height* retorna a altura da árvore sintáctica da sua entrada, considerando o “primeiro piso” como 0. Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \min(SSS0, S0) = S0 & \text{height}(\neg\neg p_7) = S S 0 \\ \max(SSS0, S0) = SSS0 & \text{height}((\neg p_2 \vee \neg(p_4 \wedge \neg p_4))) = SSSS0 \\ \min(SS0, SS0) = SS0 & \text{height}(p_{42}) = 0 \\ \max(SS0, SS0) = SS0 & \text{height}((p_1 \wedge p_2)) = S0 \end{array}$$

DEFINIÇÕES.



Só isso mesmo.

---

<sup>5</sup>sem depender em outras funções/relações não-definidas aqui

## RASCUNHO

## RASCUNHO

## RASCUNHO