FMC2, 2017.2
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28/100; bonus: $9^\flat$; time: 50')

Nome: Θάνος **Gabarito**

18/08/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Reponde em no máximo um dos problemas $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}\}$.[4]

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas nos dois problemas não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(12) **A**

(4) **A1.** Defina formalmente (usando ou "$\cdots \overset{\text{def}}{\iff} \ldots$" ou "$\cdots \overset{\text{def}}{=} \ldots$") o operador unário $\bigcap$ e a relação binária $\subseteq$.

DEFINIÇÃO DE $\bigcap$:

$$x \in \bigcap \mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} \text{para todo } A \in \mathscr{A},\ x \in A$$

DEFINIÇÃO DE $\subseteq$:

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} (\forall x \in A)\,[\, x \in B \,] \qquad \Big(\iff \forall x\,(x \in A \to x \in B) \Big)$$

(6) **A2.** Sejam os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2\}\,; \qquad B = \{1, 2, 3\}\,; \qquad C = \{n - 1 \mid n \text{ é primo}\}\,;$$

e para todo real $\epsilon > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, sejam os intervalos de reais

$$I_\epsilon = [0, 1 + \epsilon)$$
$$U_n = [n, +\infty).$$

Calcule os conjuntos:

$A \setminus B = \{0\}$

$A \triangle \emptyset = A$

$(A \triangle B) \times \{0\} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 3, 0\rangle\}$

$(A \cup B) \setminus C = \{0, 3\}$

$\wp\emptyset = \{\emptyset\}$

$\bigcup \wp \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$\bigcap \{I_\epsilon \mid \epsilon > 0\} = [0, 1]$

$\bigcap_{n=2}^{\infty} U_n = \emptyset$

(2) **A3.** Ache conjunto finito e não vazio A tal que $|A| < |\bigcap A| < |\bigcup A|$.

RESPOSTA.

$$A := \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\} \qquad \big(2 < 3 < 5\big)$$

(12) **B**

B1. Prove ou refuta a afirmação:

para todos os conjuntos A, B, C, *se* $A \subseteq B$ *e* $A \subseteq C$, *então* $A \subseteq B \cap C$.

PROVA/REFUTAÇÃO.

Vou provar a afirmação.

Suponha que $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$. Tome um $a \in A$. Precisamos mostrar que $a \in B \cap C$. Como $a \in A$ e $A \subseteq B$, temos $a \in B$; e como $a \in A$ e $A \subseteq C$, temos $a \in C$. Logo $a \in B \cap C$, pela definição de $B \cap C$.

B2. Prove ou refuta a afirmação:

para todos os conjuntos A, B, C, *se* $A \subsetneq B$ *e* $A \subsetneq C$, *então* $A \subsetneq B \cap C$.

PROVA/REFUTAÇÃO.

Vou refutar a afirmação com um contraexemplo.

Tome

$$\begin{aligned} A &:= \{2\} \\ B &:= \{1, 2\} \\ C &:= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Realmente $A \subsetneq B$ e $A \subsetneq C$, mas mesmo assim $A = B \cap C$.

(16) **C**

Sejam $\{A_n\}_n$ e $\{B_n\}_n$ duas seqüências de conjuntos, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subsetneq B_{n+1}$.

(8) **C1.** Prove que:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

PROVA.

Suponha $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Preciso mostrar que $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$, ou seja, achar um $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_m$ (pela definição de $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$). Pela hipótese, $x \in B_{m+1}$. Tome $k := m + 1$ então, algo que mostra que $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.

(8) **C2.** Mostre que, em geral, não podemos concluir que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subsetneq \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos construir um contraexemplo.

Considere as seqüências de conjuntos seguintes: para todo $n \in \mathbb{N}$ define

$$A_n := (-n, n) \qquad \begin{aligned} B_0 &:= \emptyset \\ B_{n+1} &:= [-n, n]. \end{aligned}$$

Observe que, realmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $A_n \subsetneq B_{n+1}$:

$$A_n = (-n, n) \subsetneq [-n, n] = B_{n+1}.$$

Mesmo assim,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

(9♭) **D**

Considere as linguagens N e F geradas pelas gramáticas

$$N ::= 0 \mid SN \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} F &::= A \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \\ A &::= p_0 \mid p_1 \mid p_2 \mid \cdots \end{aligned}$$

Defina recursivamente e *elementariamente*[5] as funções

$$\min : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N} \qquad \max : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N} \qquad \mathrm{height} : \mathsf{F} \to \mathsf{N}$$

onde as min e max retornam o mínimo e o máximo das suas entradas respectivamente, e a height retorna a altura da árvore sintáctica da sua entrada, considerando o "primeiro piso" como 0. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &\min(SSS0, S0) = S0 && \mathrm{height}(\neg\neg p_7) = SS0 \\ &\max(SSS0, S0) = SSS0 && \mathrm{height}((\neg p_2 \vee \neg(p_4 \wedge \neg p_4))) = SSSS0 \\ &\min(SS0, SS0) = SS0 && \mathrm{height}(p_{42}) = 0 \\ &\max(SS0, SS0) = SS0 && \mathrm{height}((p_1 \wedge p_2)) = S0 \end{aligned}$$

Definições.

$$\begin{aligned} \min &: \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N} \\ \min(0, n) &= 0 \\ \min(m, 0) &= 0 \\ \min(Sm, Sn) &= S\min(m, n) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max &: \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N} \\ \max(0, n) &= n \\ \max(m, 0) &= m \\ \max(Sm, Sn) &= S\max(m, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{height} &: \mathsf{F} \to \mathsf{N} \\ \mathrm{height}(p) &= 0 && \text{para } p \in \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \\ \mathrm{height}(\neg F) &= S\,\mathrm{height}(F) && \text{para } F \in \mathsf{F} \\ \mathrm{height}((F \wedge G)) &= S\max(\mathrm{height}(F), \mathrm{height}(G)) && \text{para } F, G \in \mathsf{F} \\ \mathrm{height}((F \vee G)) &= S\max(\mathrm{height}(F), \mathrm{height}(G)) && \text{para } F, G \in \mathsf{F} \end{aligned}$$

Só isso mesmo.

[5] sem depender em outras funções/relações não-definidas aqui