FMC2, 2017.1
(Turmas T56+N12 do Thanos)

Prova 4
(points: 156/100; bonus: $0^\flat$; time: 120')

Nome: Θάνος **Gabarito**

30/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ para resolver.**[4]

XIII. **Para quem já passou FMC2:**
Seja p o número dos teus pontos desta prova.
Então $(p - 100) \vee 0$ pontos serão distribuidos nas tuas três notas existentes.

Para quem não passou FMC2:
A nota desta prova vai substituir tua pior das provas existentes.

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas em mais que o permitido não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i\, (\emptyset \in i \land \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Replacement (schema).
Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \tag{ZF8}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G \,;\, e, * \rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\, [\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\, [\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\, [\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\, (\exists a' \in G)\, [\, a' * a = e = a * a'\,] \tag{G3}$$

Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$N \trianglelefteq G \quad \begin{aligned} &\overset{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G \text{ e } n \in N,\ gng^{-1} \in N \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

Definição 3. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \overset{\text{def}}{=} \sup \{x, y\} \qquad\qquad x \wedge y \overset{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

Definição 4. Um poset não vazio $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ é um *reticulado completo* sse $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ existem para todo $S \subseteq L$.

(52) **A**

Seja $\langle P\ ;\leq\rangle$ um poset. Denotamos com P^∂ o poset $\langle P\ ;\geq\rangle$.

(12) **A1.** Defina um $\varphi : \mathcal{O}(P) \cong \mathcal{O}\big(P^\partial\big)$.

Definição.

$$\varphi(X) \stackrel{\text{def}}{=} P \setminus X$$

(16) **A2.** Defina um $\psi : \mathcal{O}(P_1 \uplus P_2) \cong \mathcal{O}(P_1) \times \mathcal{O}(P_2)$.

Definição.

$$\psi(D) \stackrel{\text{def}}{=} \langle D \cap P_1, D \cap P_2\rangle$$

(24) **A3.** O que podes concluir sobre os ordinais α e β se...:

(i) $\omega + \alpha = \omega$

(ii) $\alpha + \omega = \omega$

(iii) $\omega \cdot \alpha = \omega$

(iv) $\alpha \cdot \omega = \omega$

(v) $\alpha + \beta = \omega$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \omega$

Conclusões.

(i) $\alpha = 0$

(ii) α é finito

(iii) $\alpha = 1$

(iv) α finíto & $\alpha \neq 0$

(v) **ou** $\begin{cases} \alpha \text{ finíto } \& \ \beta = \omega \\ \alpha = \omega \ \& \ \beta = 0 \end{cases}$

(vi) **ou** $\begin{cases} 1 \leq \alpha < \omega \ \& \ \beta = \omega \\ \alpha = \omega \ \& \ \beta = 1 \end{cases}$

(52) **B**

(24) **B1.** Prove que não existe uma cadeia infinita $\in$-descendente

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots \ni x_n \ni x_{n+1} \ni \cdots$$

PROVA.

Suponha (para chegar num absurdo) que temos uma seqüência $(n \mapsto x_n)$. Considere seu range, o conjunto

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Vamos provar que nenhum elemento de X é disjunto com X, contradizendo assim o Foundation, e chegando num absurdo. Seja $x \in X$. (Queremos $x \cap X \neq \emptyset$.) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_n$. Logo $x = x_n \ni x_{n+1}$. Mas $x_{n+1} \in X$. Ou seja, $x \cap X \neq \emptyset$ pois tem pelo menos um elemento: o $x(= x_n)$.

(28) **B2.** Mostre que podemos tirar o Pairset (ZF3) da ZF "sem perder nada". Ou seja, dado objetos a, b, mostre que existe o conjunto $\{a, b\}$ que consiste em exatamente esses objetos.
PROVA.

Sejam a, b objetos. Considere a class-function

$$\Phi(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x = \emptyset \\ b, & \text{se } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Agora precisamos apenas construir um conjunto S tal que: $\emptyset \in S$, e $|S| \geq 2$. Pelo Emptyset, temos o $\emptyset$. Pelo Powerset aplicado no $\emptyset$ ganhamos o $\{\emptyset\}$, e aplicando mais uma vez o Powerset chegamos no $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Usando o Replacement com a $\Phi(x)$ nesse conjunto, construimos o desejado $\{a, b\}$.

Em forma de arvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\emptyset}\,\text{Empty}}{\{\emptyset\}}\,\text{Power}}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}\,\text{Power}}{\{a, b\}}\,\text{Repl; } \Phi$$

(52) ## C

Um $A \subseteq \mathbb{N}$ é *cofinito* sse $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

(12) **C1.** Mostre que a família $\mathscr{L}_1 \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é cofinito}\}$ é um reticulado de conjuntos.

PROVA.

Sejam $A, B \in \mathscr{L}_1$. Pela definição então $\mathbb{N} \setminus A$ e $\mathbb{N} \setminus B$ são finitos. Vou mostrar que $A \cup B$ e $A \cap B$ são cofinitos, e logo pertencem no $\mathscr{L}_1$ também. Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \setminus (A \cup B) &= (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B) \\ \mathbb{N} \setminus (A \cap B) &= (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)\,, \end{aligned}$$

logo os dois conjuntos no lado esquerdo são finitos como intersecção e união de finitos respectivamente.

(16) **C2.** Mostre que a família $\mathscr{L}_2 \coloneqq \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ é finito ou cofinito}\}$ também é.

PROVA.

Sejam $A, B \in L_2$. Sepramos em casos:

CASO AMBOS FINITOS: Facilmente $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos também, como intersecção e união de conjuntos finitos. Logo ambos pertencem no $\mathscr{L}_2$.

CASO AMBOS COFINITOS: Provamos isso no **C1**.

CASO CONTRÁRIO: Temos um dos A, B finito e o outro cofinito. Sem perda de generalidade, suponha que A finito, B cofinito. O $A \cap B$ é trivialmente finito como intersecção de finito com qualquer conjunto. Logo $A \cap B \in \mathscr{L}_2$. O $A \cup B$ é cofinito, pois

$$\mathbb{N} \setminus (A \cup B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$$

que é finito para o mesmo motivo (intersecção com o $\mathbb{N} \setminus B$ que é finito). Logo $A \cup B \in \mathscr{L}_2$.

(24) **C3.** Seja $A_n \coloneqq \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \dots, 2n-2\}$ o $\mathbb{N}$ sem os primeiros n números pares. Mostre que:

se $B \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então B não é cofinito.

Deduza que nem $\mathscr{L}_1$ nem $\mathscr{L}_2$ são completos.
PROVA.

Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$, $B \subseteq A_n$. Logo

$$B \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

e complementando os dois lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \setminus B \supseteq \mathbb{N} \setminus \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \\ = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus A_i) \\ = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\{0, 2, \dots, 2n-2\}) \\ = 2\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $2\mathbb{N}$ é infinito, o B não é cofinito.

Isso mostra que nenhum dos $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ são completos. Pois considere o conjunto

$$\mathcal{S} \coloneqq \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$$

Observe que $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ pois todos os seus elementos são claramente cofinitos. Mesmo assim, o $\bigcap \mathcal{S}$ não é cofinito e logo não pertence em nenhum dos $\mathscr{L}_1, L_2$.

Por que o $\bigcap \mathcal{S}$ não é cofinito? Calcule esse conjunto para terminar essa prova.

(52) **D**

(12) **D1.** Se $H \leq G$ de indice 2, então $H \trianglelefteq G$.

Prova.

Suponha $H \leq G$. Precisamos mostrar que $aH = Ha$ para todo $a \in G$. Como o índice de H é 2, só tem 2 cosets, logo, fora do proprio H, seu complemento $G \setminus H$ tem que ser um coset. Agora para qualquer aH com $a \notin H$, temos

$$aH = G \setminus H = Ha.$$

(16) **D2.** Se $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, então $H \cap N \trianglelefteq H$.

Prova.

Temos $H \cap N \leq N \leq G$ como intersecção de subgrupos. Basta mostrar que $H \cap N \trianglelefteq H$, ou seja, que $H \cap N$ é fechado pelos conjugados. Tome $x \in H \cap N$ e $h \in H$. Temos:

$$\begin{aligned} hxh^{-1} &\in H && (H \leq G) \\ hxh^{-1} &\in N && (N \trianglelefteq G) \end{aligned}$$

Logo $hxh^{-1} \in H \cap N$.

(24) **D3.** Seja $H \leq G$. Defina $a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab^{-1} \in H$.

(12) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

PROVAS.

REFLEXIVIDADE:
Seja $a \in G$. Temos $aa^{-1} = e \in H$, pois $H \leq G$, e logo $a \sim a$.

SIMETRIA:
Sejam $a, b \in G$ com $a \sim b$, equivalentemente $ab^{-1} \in H$. Logo, como $H \leq G$,

$$H \ni \left(ab^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1}\right)^{-1} a^{-1} = ba^{-1}.$$

Ou seja, $b \sim a$.

TRANSITIVIDADE:
Seja, $a, b, c \in G$ com $a \sim b$ e $b \sim c$. Equivalentemente $ab^{-1}, bc^{-1} \in H$. Como $H \leq G$, também $H \ni ab^{-1}bc^{-1} = aec^{-1} = ac^{-1}$. Logo $a \sim c$.

(12) Sejam $a, b \in G$. Prove que:

(i) $a \in H, b \in H \implies a \sim b$

(ii) $a \in H, b \notin H \implies a \not\sim b$

(iii) $a \notin H, b \notin H \;\not\Longrightarrow\; a \sim b$

(iv) $a \notin H, b \notin H \;\not\Longrightarrow\; a \not\sim b$

PROVAS.

(i) Suponha $a, b \in H$. Como $b \in H$ e $H \leq G$, $b^{-1} \in H$. Logo $ab^{-1} \in H$ pela (G0).

(ii) Suponha $a, b \in G$ com $a \in H$ e $b \notin H$ (logo também temos $b^{-1} \notin H$ pois H sendo grupo é fechado pelos inversos). Para chegar num absurdo, suponha que $ab^{-1} \in H$. Agora, como $a \in H$, então $a^{-1} \in H$, e logo $a^{-1}\left(ab^{-1}\right) \in H$. Agora temos:

$$H \ni a^{-1}\left(ab^{-1}\right) = \left(a^{-1}a\right)b^{-1} = eb^{-1} = b^{-1} \notin H,$$

que é absurdo. Concluimos que $ab^{-1} \notin H$, logo $a \not\sim b$.

(iii) & (iv) Tome no $\langle \mathbb{Z} \,;\, + \rangle$ o subgrupo $3\mathbb{Z}$.
Para o (iii) escolhe os $1, 2 \in \mathbb{Z}$: $1 + (-2) = -1 \notin 3\mathbb{Z}$.
Para o (iv) escolhe os $1, 4 \in \mathbb{Z}$: $1 + (-4) = -3 \in 3\mathbb{Z}$.

Só isso mesmo.