
Nome:

23/06/2017

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.³
- XII. **Escolha bem a ordem de atacar os problemas.**
Os pontos da prova serão calculados assim: $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$.⁴

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Veja rodapé 2.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \quad (\text{ZF1})$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \quad (\text{ZF2})$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \quad (\text{ZF3})$$

Separation (schema).

Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \quad (\text{ZF4})$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \quad (\text{ZF5})$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \quad (\text{ZF6})$$

Infinity.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \quad (\text{ZF7})$$

Replacement (schema).

Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:

Para todo conjunto a , a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \quad (\text{ZF8})$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset) (\exists d \in a) [d \cap a = \emptyset] \quad (\text{ZF9})$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L ; \vee, \wedge \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $a, b, c \in L$:

$$(\text{Ass1}) \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \vee a = a \qquad (\text{Idem1})$$

$$(\text{Ass2}) \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \qquad a \wedge a = a \qquad (\text{Idem2})$$

$$(\text{Com1}) \quad a \vee b = b \vee a \qquad (a \vee b) \wedge a = a \qquad (\text{Abs1})$$

$$(\text{Com2}) \quad a \wedge b = b \wedge a \qquad (a \wedge b) \vee a = a \qquad (\text{Abs2})$$

Definição 2. Um poset $\mathcal{L} = \langle L ; \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{x, y\}$$

$$x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

(78) **A**

“Definição”. Um *multiset* (ou *bag*) M é como um conjunto onde um elemento pode pertencer no M mais que uma vez (mas não uma infinidade de vezes). Ou seja, a ordem não importa (como nos conjuntos), mas a “multiplicidade” importa sim.

Queremos tres operações em multisets, exemplificadas assim:

$$\begin{aligned} \{x, y, y, z, z, z, w\} \cup \{x, y, z, z, u, v, v\} &= \{x, y, y, z, z, z, u, v, v, w\} \\ \{x, y, y, z, z, z, w\} \cap \{x, y, z, z, u, v, v\} &= \{x, y, z, z\} \\ \{x, y, y, z, z, z, w\} \oplus \{x, y, z, z, u, v, v\} &= \{x, x, y, y, y, z, z, z, z, z, u, v, v, w\} \end{aligned}$$

Também queremos um predicado de “pertencer” ε e uma relação de “submultiset” \subseteq tais que:

$$\begin{array}{ll} x \varepsilon \{x, y, y, z, z, z, w\} & \{x, y, z, z\} \subseteq \{x, x, y, y, z, z\} \\ z \varepsilon \{x, y, y, z, z, z, w\} & \{x, y, z, z\} \not\subseteq \{x, x, y, y, z\} \\ u \notin \{x, y, y, z, z, z, w\} & \{x, y, z, z\} \subseteq \{x, y, z, z\} \\ x \notin \emptyset \text{ para todo } x & M \subseteq M \text{ para todo multiset } M \\ & \emptyset \subseteq M \text{ para todo multiset } M. \end{array}$$

(MS1) Para os multisets A e B temos $A = B$ sse eles tem os mesmos membros com as mesmas multiplicidades. Por exemplo,

$$\{x, y, z, z, y\} = \{x, y, y, z, z\} \neq \{x, y, z\}.$$

(MS2) Para cada conjunto A , a classe

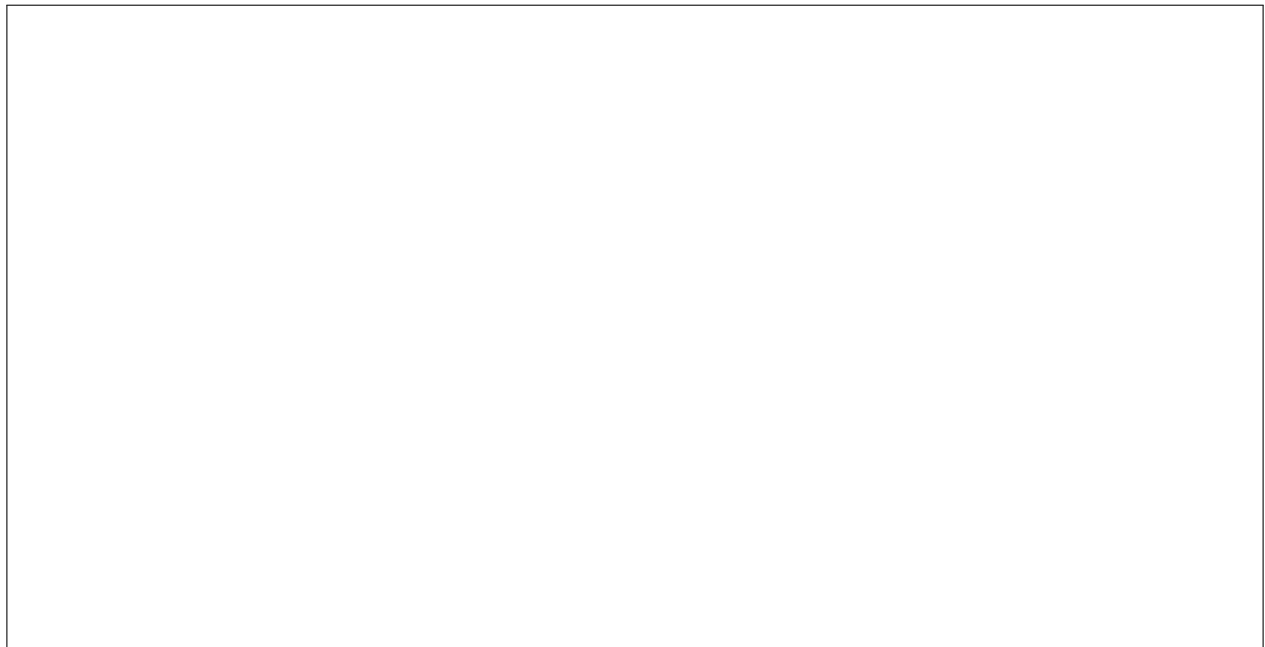
$$\{M \mid M \text{ é multiset e } \forall x(x \varepsilon M \rightarrow x \in A)\}$$

de todos os multisets formados por membros de A é um conjunto.

(26) **A1.** Defina formalmente (em teoria de conjuntos) o termo “multiset” e mostre (como exemplos) como são representados os multisets seguintes:

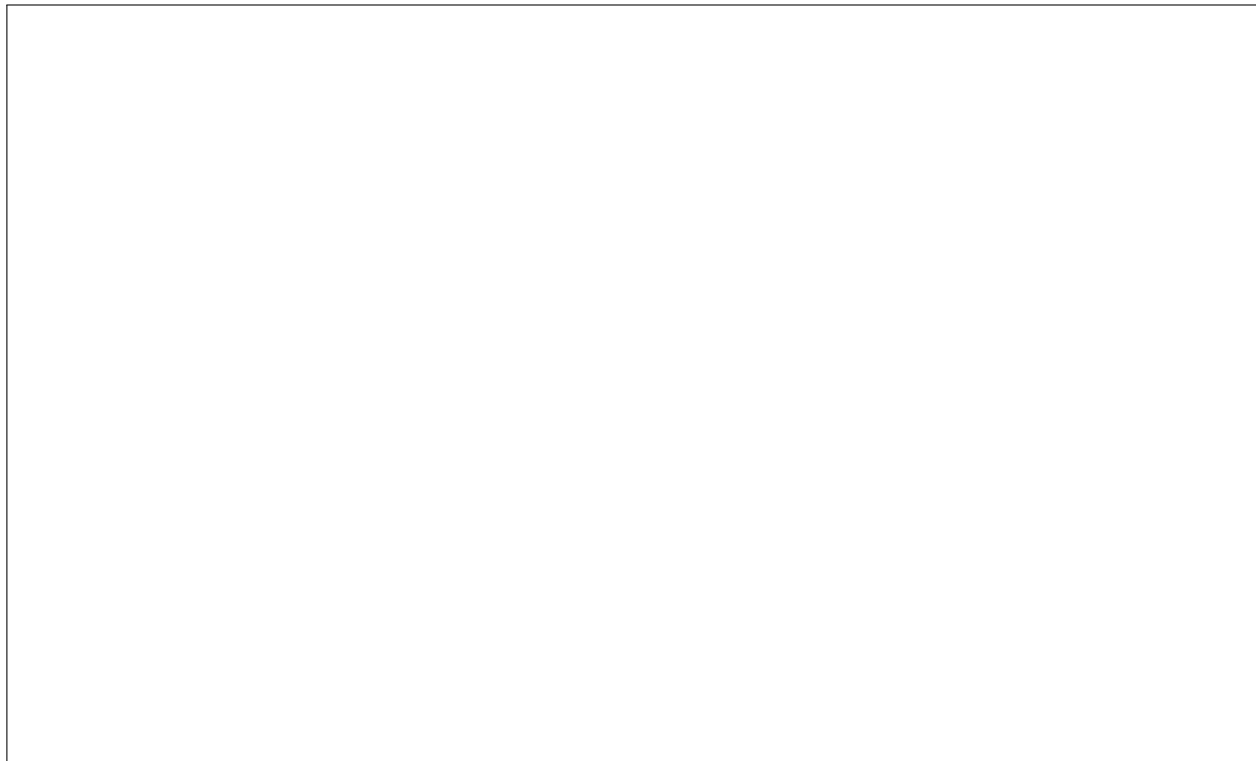
$$\emptyset \quad \{0, 1, 2, 2, 1\} \quad \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots\}.$$

DEFINIÇÃO.



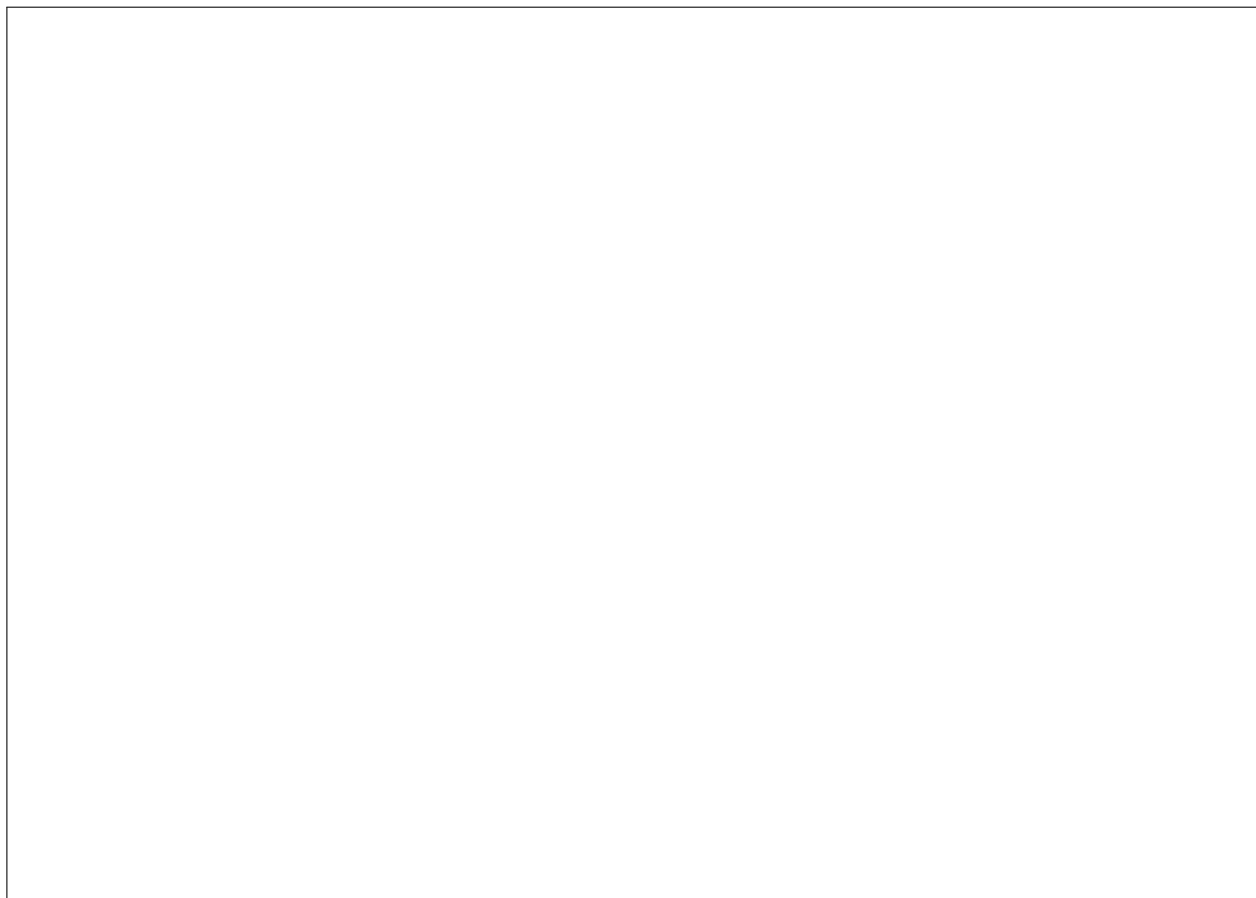
(20) **A2.** Defina as operações de multisets (\cup, \cap, \oplus) e os predicados (ε, \in) .

DEFINIÇÕES.



(32) **A3.** Prove pelos axiomas ZF que tua definição satisfaz a (MS2).

PROVA.



(60) **B**

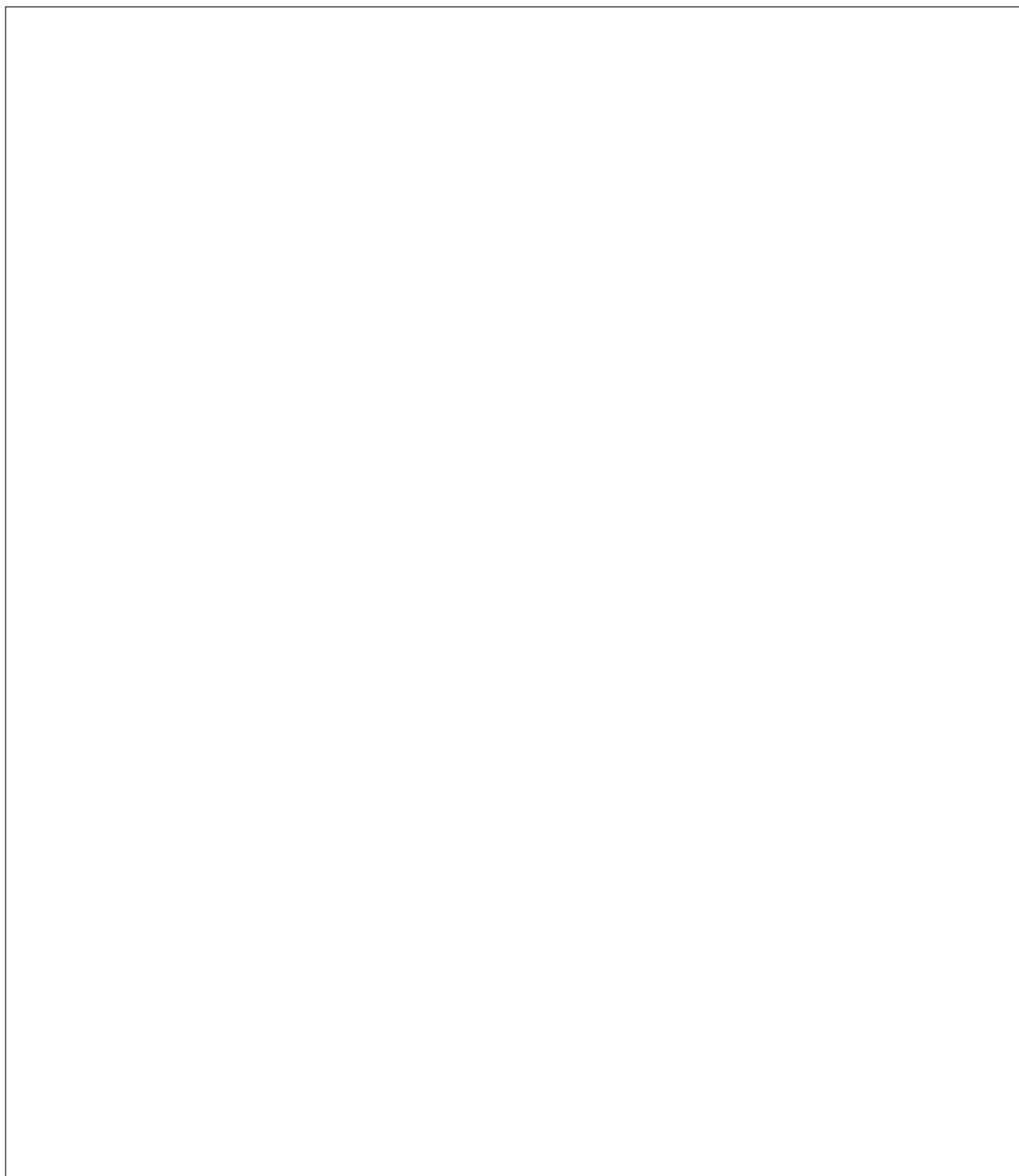
(24) **B1.** Sejam a, b, c, d conjuntos. Mostre pelos axiomas ZF que os seguintes também são:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, b, \{c, d\}\}$$

$$C = \{x \mid x \subseteq a \cup b \cup c \cup d \text{ \& } x \text{ tem exatamente 2 membros}\}$$

PROVA.



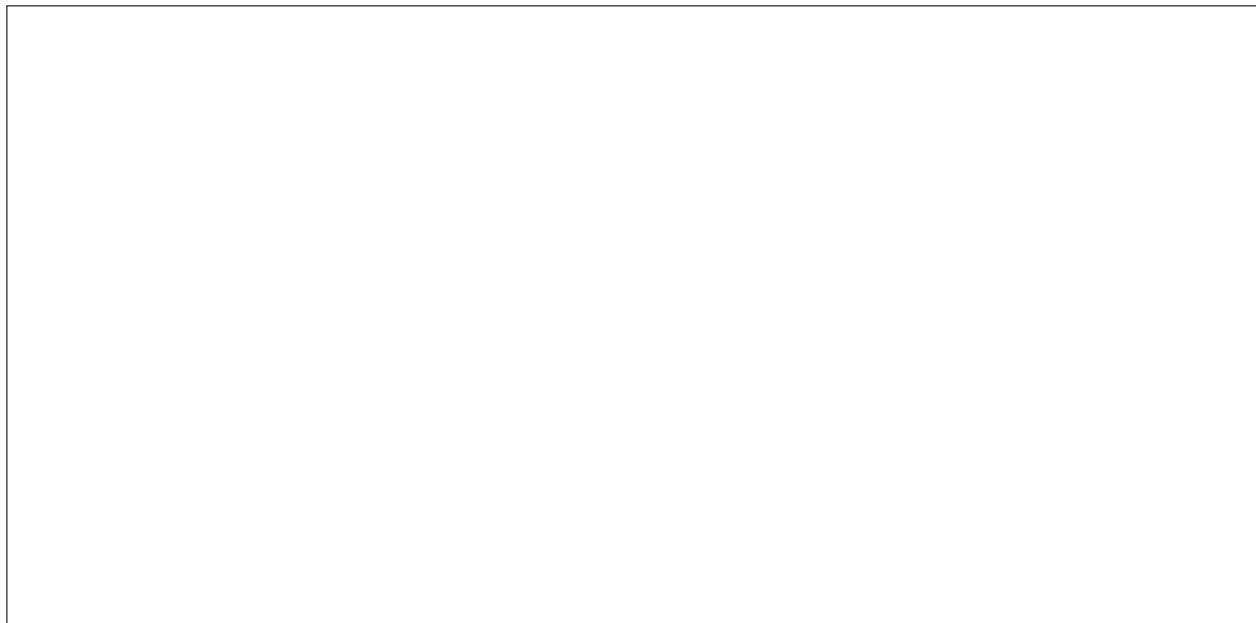
- (36) **B2.** Mostre que podemos tirar o Separation (ZF4) da ZF “sem perder nada”. Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.
PROVA.

(64) **C**

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos o poset $\mathcal{D}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle D_n ; | \rangle$ onde $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}$.

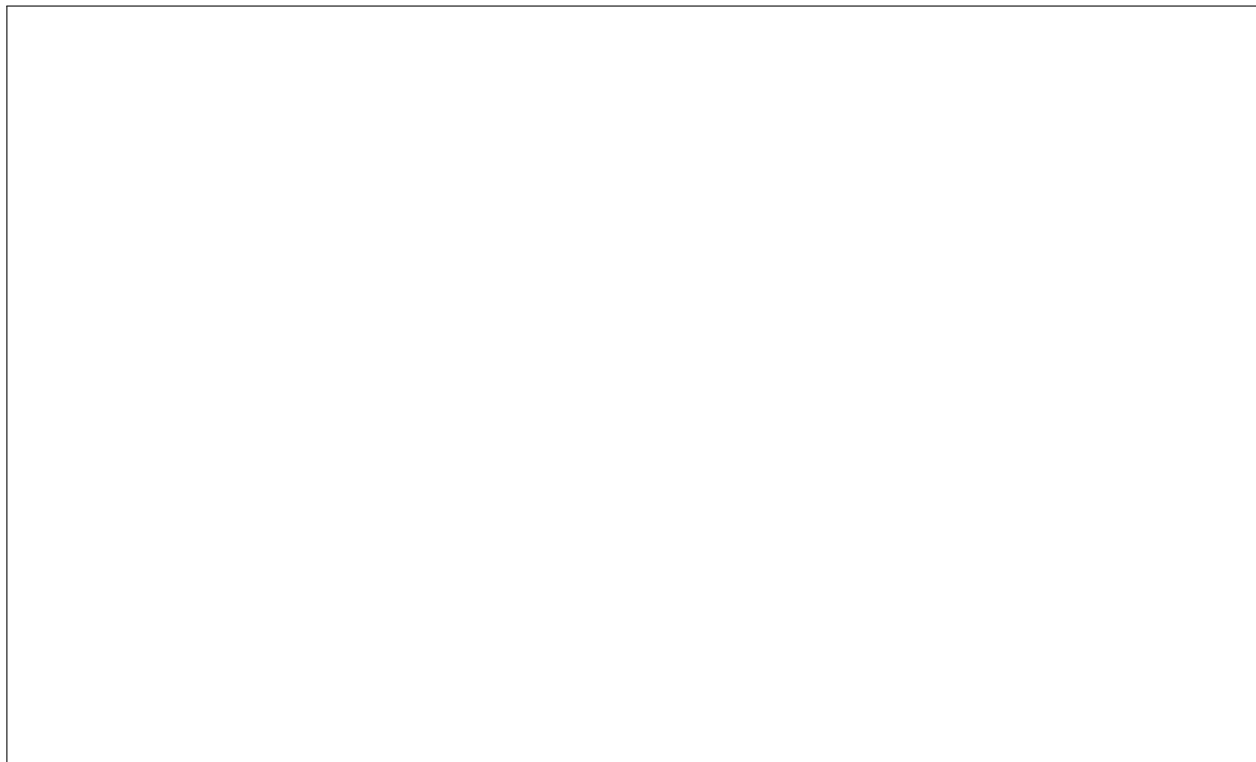
(16) **C1.** Desenha o diagrama Hasse de \mathcal{D}_{30} .

DIAGRAMA.



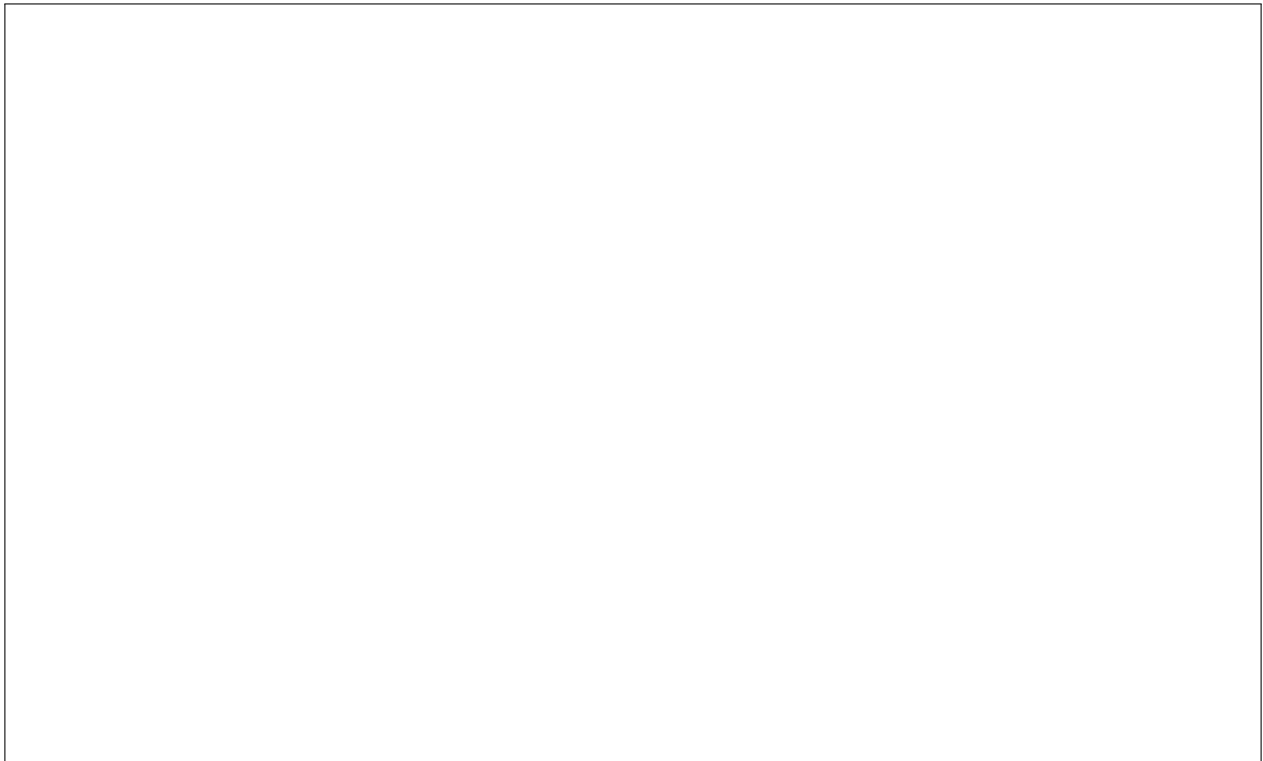
(16) **C2.** Ache conjunto A tal que $\mathcal{D}_{30} \cong \langle \wp A ; \subseteq \rangle$, e defina um isomorfismo $\varphi : \mathcal{D}_{30} \rightarrow \wp A$.

RESPOSTA.



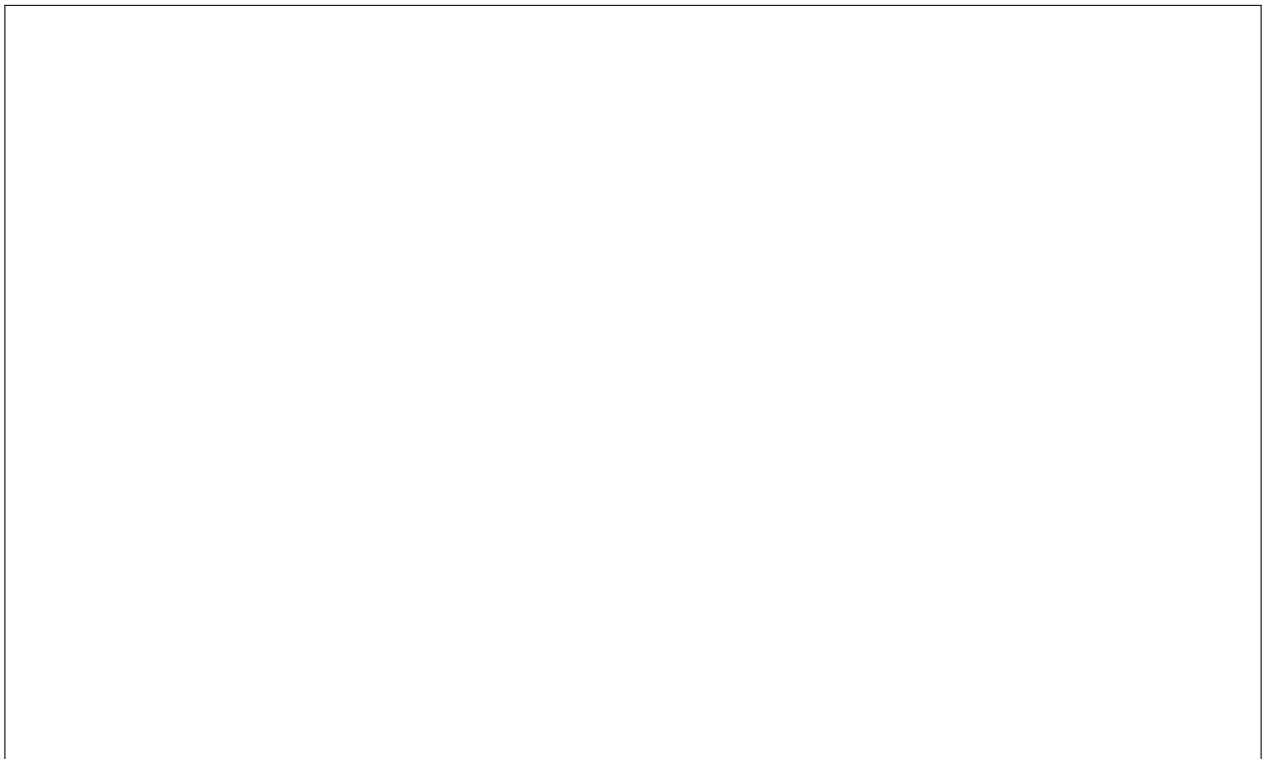
- (16) **C3.** Existe conjunto B tal que $\mathcal{D}_0 \cong \langle \wp B ; \subseteq \rangle$? Se sim, ache o B e defina um isomorfismo $\varphi : D_0 \rightarrow \wp B$. Se não, prove que é impossível.

RESPOSTA.



- (16) **C4.** Verdade ou falso? $\mathcal{D}_0 \cong \langle \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\} ; \subseteq \rangle$.

PROVA/REFUTAÇÃO.



(64) **D**

(16) **D1.** Seja $\mathcal{L} = \langle L ; \vee, \wedge \rangle$ um lattice (Def. 1). Prove que:

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

PROVA.



(16) **D2.** Seja $\mathcal{L} = \langle L ; \leq \rangle$ um poset tal que $\bigwedge H$ existe para todo $H \subseteq L$. Mostre que \mathcal{L} é um lattice.

PROVA.



(16 + 16^b) **D3.** Prove que podemos inferir as leis (Idem1)–(Idem2) pelas outras.

Dica: Custa 16^b. $a \vee (a \wedge (a \vee a))$

PROVA.

(16) **D4.** O $\omega^2 + 1$ é bem ordenado.

Dica: Lembre-se que usamos a ordem (anti)lexicográfica nos produtos. Tome A tal que $\emptyset \neq A \subseteq \omega^2 + 1$ e ache se \perp é um mínimo. Separe casos dependendo se $A = \{\perp\}$ ou não, onde \perp o máximo elemento do $\omega^2 + 1$.

PROVA.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO