FMC2, 2017.1
(Turmas T56+N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 142/100; bonus: $16^\flat$; time: 90')

Nome:

23/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\text{Colar}(x) \to \neg\text{Passar}(x, \text{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha bem a ordem de atacar os problemas.**
Os pontos da prova serão calculados assim: $(\mathbf{A} \lor \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \land \mathbf{D})$.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Veja rodapé 2.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\,(a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)) \qquad \text{(ZF1)}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x(x \notin e) \qquad \text{(ZF2)}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \qquad \text{(ZF3)}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \qquad \text{(ZF4)}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \qquad \text{(ZF5)}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow \exists d(x \in d \wedge d \in a)) \qquad \text{(ZF6)}$$

Infinity.

$$\exists i\,(\emptyset \in i \wedge \forall x(x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \qquad \text{(ZF7)}$$

Replacement (schema).
Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \qquad \text{(ZF8)}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \qquad \text{(ZF9)}$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L \;;\; \vee, \wedge \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $a, b, c \in L$:

(Ass1)	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \vee a = a$	(Idem1)
(Ass2)	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \wedge a = a$	(Idem2)
(Com1)	$a \vee b = b \vee a$	$(a \vee b) \wedge a = a$	(Abs1)
(Com2)	$a \wedge b = b \wedge a$	$(a \wedge b) \vee a = a$	(Abs2)

Definição 2. Um poset $\mathcal{L} = \langle L \;;\; \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x, y\} \qquad\qquad x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$$

(78) **A**

“Definição”. Um *multiset* (ou *bag*) M é como um conjunto onde um elemento pode pertencer no M mais que uma vez (mas não uma infinidade de vezes). Ou seja, a ordem não importa (como nos conjuntos), mas a “multiplicidade” importa sim.

Queremos tres operações em multisets, exemplificadas assim:

$$
\begin{aligned}
&\Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag \Cup \Lbag x,y,z,z,u,v,v \Rbag = \Lbag x,y,y,z,z,z,u,v,v,w \Rbag\\
&\Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag \Cap \Lbag x,y,z,z,u,v,v \Rbag = \Lbag x,y,z,z \Rbag\\
&\Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag \oplus \Lbag x,y,z,z,u,v,v \Rbag = \Lbag x,x,y,y,y,z,z,z,z,z,u,v,v,w \Rbag
\end{aligned}
$$

Também queremos um predicado de “pertencer” ε e uma relação de “submultiset” $\Subset$ tais que:

$$
\begin{array}{ll}
x \mathrel{\varepsilon} \Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag & \Lbag x,y,z,z \Rbag \Subset \Lbag x,x,y,y,z,z \Rbag\\
z \mathrel{\varepsilon} \Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag & \Lbag x,y,z,z \Rbag \not\Subset \Lbag x,x,y,y,z \Rbag\\
u \mathrel{\not\varepsilon} \Lbag x,y,y,z,z,z,w \Rbag & \Lbag x,y,z,z \Rbag \Subset \Lbag x,y,z,z \Rbag\\
x \mathrel{\not\varepsilon} \Lbag\Rbag \quad \text{para todo } x & M \Subset M \quad \text{para todo multiset } M\\
 & \Lbag\Rbag \Subset M \quad \text{para todo multiset } M.
\end{array}
$$

(MS1) Para os multisets A e B temos $A = B$ sse eles tem os mesmos membros com as mesmas multiplicidades. Por exemplo,

$$\Lbag x,y,z,z,y \Rbag = \Lbag x,y,y,z,z \Rbag \neq \Lbag x,y,z \Rbag.$$

(MS2) Para cada conjunto A, a classe

$$\{ M \mid M \text{ é multiset e } \forall x (x \mathrel{\varepsilon} M \to x \in A) \}$$

de todos os multisets formados por membros de A é um conjunto.

(26) **A1.** Defina formalmente (em teoria de conjuntos) o termo “multiset” e mostre (como exemplos) como são representados os multisets seguintes:

$$\Lbag\Rbag \qquad \Lbag 0,1,2,2,1 \Rbag \qquad \Lbag 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots \Rbag.$$

Definição.

(20) **A2.** Defina as operações de multisets ($\Cup, \Cap, \oplus$) e os predicados (ε, $\Subset$).
DEFINIÇÕES.

(32) **A3.** Prove pelos axiomas ZF que tua definição satisfaz a (MS2).
PROVA.

(60) B

(24) **B1.** Sejam a, b, c, d conjuntos. Mostre pelos axiomas ZF que os seguintes também são:

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{a, b, \{c, d\}\}$$
$$C = \{x \mid x \subseteq a \cup b \cup c \cup d \;\;\&\;\; x \text{ tem exatamente 2 membros}\}$$

Prova.

(36) **B2.** Mostre que podemos tirar o Separation (ZF4) da ZF "sem perder nada". Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.
PROVA.

(64) **C**

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos o poset $\mathcal{D}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle D_n \ ; \mid \rangle$ onde $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}$.

(16) **C1.** Desenha o diagrama Hasse de $\mathcal{D}_{30}$.

Diagrama.

(16) **C2.** Ache conjunto A tal que $\mathcal{D}_{30} \cong \langle \wp A \ ; \subseteq \rangle$, e defina um isomorfismo $\varphi : D_{30} \to \wp A$.

Resposta.

(16) **C3.** Existe conjunto B tal que $\mathcal{D}_0 \cong \langle \wp B \; ; \subseteq \rangle$? Se sim, ache o B e defina um isomorfismo $\varphi : D_0 \to \wp B$. Se não, prove que é impossível.

RESPOSTA.

(16) **C4.** Verdade ou falso? $\mathcal{D}_0 \cong \langle \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \} \; ; \subseteq \rangle$.

PROVA/REFUTAÇÃO.

(64) # D

(16) **D1.** Seja $\mathcal{L} = \langle L\ ;\ \vee, \wedge \rangle$ um láttice (Def. 1). Prove que:

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

PROVA.

(16) **D2.** Seja $\mathcal{L} = \langle L\ ;\ \leq \rangle$ um poset tal que $\bigwedge H$ existe para todo $H \subseteq L$. Mostre que $\mathcal{L}$ é um lattice.

PROVA.

(16 + 16$^\flat$) **D3.** Prove que podemos inferir as leis (Idem1)–(Idem2) pelas outras.

Dica: *Custa* 16$^\flat$. $a \vee (a \wedge (a \vee a))$

PROVA.

(16) **D4.** O $\omega^2 + 1$ é bem ordenado.

Dica: *Lembre-se que usamos a ordem (anti)lexicográfica nos produtos. Tome* A *tal que* $\emptyset \neq A \subseteq \omega^2 + 1$ *e ache seu mínimo. Separe casos dependendo se* $A = \{\top\}$ *ou não, onde* $\top$ *o máximo elemento do* $\omega^2 + 1$.

PROVA.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho