FMC2, 2017.1
(Turmas T56+N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 142/100; bonus: 16$^\flat$; time: 90')

Nome:

23/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x \big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg \mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha bem a ordem de atacar os problemas.**
Os pontos da prova serão calculados assim: $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Veja rodapé 2.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b\,(a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x(x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x = a \lor x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow (x \in w \land \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x\,(x \in s \leftrightarrow \exists d(x \in d \land d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i\,(\emptyset \in i \land \forall x(x \in i \to x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Replacement (schema).
Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \tag{ZF8}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L\ ;\ \lor, \land\rangle$ é um *reticulado* sse para todo $a, b, c \in L$:

(Ass1)	$a \lor (b \lor c) = (a \lor b) \lor c$	$a \lor a = a$	(Idem1)
(Ass2)	$a \land (b \land c) = (a \land b) \land c$	$a \land a = a$	(Idem2)
(Com1)	$a \lor b = b \lor a$	$(a \lor b) \land a = a$	(Abs1)
(Com2)	$a \land b = b \land a$	$(a \land b) \lor a = a$	(Abs2)

Definição 2. Um poset $\mathcal{L} = \langle L\ ;\ \leq\rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \lor y$ e $x \land y$, onde

$$x \lor y \overset{\text{def}}{=} \sup\{x, y\} \qquad\qquad x \land y \overset{\text{def}}{=} \inf\{x, y\}$$

(78) **A**

"Definição". Um [redacted] um conjunto [redacted] um elemento [redacted] uma infinidade [redacted] a ordem [redacted], mas a [redacted].

Queremos tres operações [redacted] exemplificadas assim:

[redacted] = [redacted]

[redacted] = [redacted]

[redacted] = [redacted]

Também queremos um predicado [redacted] e uma relação de [redacted] tais que:

[redacted].

([redacted]1) Para [redacted] A e B temos $A = B$ sse [redacted]. Por exemplo,

[redacted] = [redacted] $\neq$ [redacted].

([redacted]2) Para cada conjunto A, a classe

[redacted]

de todos [redacted] é um conjunto.

(26) **A1.** Defina formalmente (em teoria de conjuntos) o termo [redacted] e mostre (como exemplos) como são representados os [redacted]:

[redacted]

DEFINIÇÃO.

(20) **A2.** Defina as operações [redacted] e os predicados [redacted].

Definições.

(32) **A3.** Prove pelos axiomas ZF que tua definição satisfaz a ([redacted]2).

Prova.

(60) **B**

(24) **B1.** Sejam a, b, c, d conjuntos. Mostre pelos axiomas ZF que os seguintes também são:

$A =$ [redacted]

$B =$ [redacted]

$C =$ [redacted]

PROVA.

(36) **B2.** Mostre que [redacted] ZF [redacted]. Ou seja, dado conjunto A [redacted], construa [redacted] o conjunto [redacted].

PROVA.

(64) **C**

Para [redacted], definimos o poset [redacted] onde [redacted].

(16) **C1.** Desenha o diagrama Hasse de [redacted].

DIAGRAMA.

(16) **C2.** Ache conjunto A tal que [redacted], e defina um isomorfismo $\varphi :$ [redacted] $\to$ [redacted].

RESPOSTA.

(16) **C3.** Existe conjunto B tal que [redacted]? Se sim, ache o B e defina [redacted]. Se não, prove que é impossível.

Resposta.

(16) **C4.** Verdade ou falso? [redacted] $\cong$ [redacted].

Prova/refutação.

(64) **D**

(16) **D1.** Seja $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \vee, \wedge \rangle$ um láttice (Def. 1). Prove que:

[redacted] $\iff$ [redacted].

PROVA.

(16) **D2.** Seja $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ um poset tal que [redacted]. Mostre que $\mathcal{L}$ é um lattice.

PROVA.

(16 + 16$^\flat$) **D3.** Prove que [redacted].

Dica: *Custa* 16$^\flat$. $a \vee (a \wedge (a \vee a))$

PROVA.

(16) **D4.** O [redacted] ordenado.

Dica: *Lembre-se que usamos* [redacted]. *Tome* A *tal que* [redacted]. *Separe casos* [redacted], [redacted].

PROVA.

Só isso mesmo.