FMC2, 2017.1
(Turmas T56+N12 do Thanos)

Prova 3
(points: 142/100; bonus: $16^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

23/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. **Escolha bem a ordem de atacar os problemas.**
Os pontos da prova serão calculados assim: $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Veja rodapé 2.

Axiomas ZF

Extensionality.

$$\forall a \forall b \, (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)) \tag{ZF1}$$

Emptyset.

$$\exists e \forall x (x \notin e) \tag{ZF2}$$

Pairset.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \tag{ZF3}$$

Separation (schema).
Para cada formula $\varphi(x)$ o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x))) \tag{ZF4}$$

Powerset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a) \tag{ZF5}$$

Unionset.

$$\forall a \exists s \forall x \, (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a)) \tag{ZF6}$$

Infinity.

$$\exists i \, (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i)) \tag{ZF7}$$

Replacement (schema).
Para cada class-function $\Phi(x)$ o seguinte:
Para todo conjunto a, a classe

$$\{\Phi(x) \mid x \in a\} \tag{ZF8}$$

é um conjunto.

Foundation.

$$(\forall a \neq \emptyset)(\exists d \in a)[d \cap a = \emptyset] \tag{ZF9}$$

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{L} = \langle L \; ; \; \vee, \wedge \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $a, b, c \in L$:

(Ass1)	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \vee a = a$	(Idem1)
(Ass2)	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \wedge a = a$	(Idem2)
(Com1)	$a \vee b = b \vee a$	$(a \vee b) \wedge a = a$	(Abs1)
(Com2)	$a \wedge b = b \wedge a$	$(a \wedge b) \vee a = a$	(Abs2)

Definição 2. Um poset $\mathcal{L} = \langle L \; ; \; \leq \rangle$ é um *reticulado* sse para todo $x, y \in L$ existem os $x \vee y$ e $x \wedge y$, onde

$$x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{x, y\} \qquad\qquad x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{x, y\}$$

(78) # A

"Definição". Um *multiset* (ou *bag*) M é como um conjunto onde um elemento pode pertencer no M mais que uma vez (mas não uma infinidade de vezes). Ou seja, a ordem não importa (como nos conjuntos), mas a "multiplicidade" importa sim.

Queremos tres operações em multisets, exemplificadas assim:

$$\begin{aligned}
&\lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag \Cup \lbag x,y,z,z,u,v,v \rbag = \lbag x,y,y,z,z,z,u,v,v,w \rbag \\
&\lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag \Cap \lbag x,y,z,z,u,v,v \rbag = \lbag x,y,z,z \rbag \\
&\lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag \oplus \lbag x,y,z,z,u,v,v \rbag = \lbag x,x,y,y,y,z,z,z,z,z,u,v,v,w \rbag
\end{aligned}$$

Também queremos um predicado de "pertencer" ε e uma relação de "submultiset" $\Subset$ tais que:

$$\begin{array}{ll}
x \mathrel{\varepsilon} \lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag & \lbag x,y,z,z \rbag \Subset \lbag x,x,y,y,z,z \rbag \\
z \mathrel{\varepsilon} \lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag & \lbag x,y,z,z \rbag \not\Subset \lbag x,x,y,y,z \rbag \\
u \mathrel{\not\varepsilon} \lbag x,y,y,z,z,z,w \rbag & \lbag x,y,z,z \rbag \Subset \lbag x,y,z,z \rbag \\
x \mathrel{\not\varepsilon} \lbag\rbag \quad \text{para todo } x & M \Subset M \quad \text{para todo multiset } M \\
 & \lbag\rbag \Subset M \quad \text{para todo multiset } M.
\end{array}$$

(MS1) Para os multisets A e B temos $A = B$ sse eles tem os mesmos membros com as mesmas multiplicidades. Por exemplo,

$$\lbag x,y,z,z,y \rbag = \lbag x,y,y,z,z \rbag \neq \lbag x,y,z \rbag.$$

(MS2) Para cada conjunto A, a classe

$$\{ M \mid M \text{ é multiset e } \forall x (x \mathrel{\varepsilon} M \to x \in A) \}$$

de todos os multisets formados por membros de A é um conjunto.

(26) **A1.** Defina formalmente (em teoria de conjuntos) o termo "multiset" e mostre (como exemplos) como são representados os multisets seguintes:

$$\lbag\rbag \qquad \lbag 0,1,2,2,1 \rbag \qquad \lbag 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\dots \rbag.$$

DEFINIÇÃO.

Um *multiset* é uma tupla $\mathcal{M} = \langle M \ ; \ f \rangle$ onde M é um conjunto e $f : M \to \mathbb{N}_{>0}$.

$$\begin{aligned}
\lbag\rbag &= \langle \emptyset \ ; \ \emptyset \rangle \\
\lbag 0,1,2,2,1 \rbag &= \langle \{0,1,2\} \ ; \ f \rangle \\
\lbag 1,2,2,3,3,3,\dots \rbag &= \langle \mathbb{N}_{>0} \ ; \ \mathrm{id}_{\mathbb{N}_{>0}} \rangle
\end{aligned}$$

onde $f : \{0,1,2\} \to \mathbb{N}_{>0}$ é a função definida pela

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \mathrm{n} = 0 \\ 2, & \mathrm{n} = 1 \\ 2, & \mathrm{n} = 2 \end{cases}$$

(20) **A2.** Defina as operações de multisets ($\Cup, \Cap, \oplus$) e os predicados (ε, $\Subset$).
Definições.

$$\begin{aligned}
\langle A;\alpha\rangle \Cup \langle B;\beta\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle A\cup B\ ;\ \lambda x.\max\{\alpha(x),\beta(x)\}\rangle\\
\langle A;\alpha\rangle \Cap \langle B;\beta\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle A\cap B\ ;\ \lambda x.\min\{\alpha(x),\beta(x)\}\rangle\\
\langle A;\alpha\rangle \oplus \langle B;\beta\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle A\cup B\ ;\ \lambda x.(\alpha(x)+\beta(x))\rangle\\
x\ \varepsilon\ \langle A;\alpha\rangle &\stackrel{\text{def}}{\iff} x\in A\\
\langle A;\alpha\rangle \Subset \langle B;\beta\rangle &\stackrel{\text{def}}{\iff} A\subseteq B\ \ \&\ \ (\forall x\in A)[\alpha(x)\le\beta(x)]
\end{aligned}$$

(32) **A3.** Prove pelos axiomas ZF que tua definição satisfaz a (MS2).
Prova.

Seja A conjunto. O arbitrário multiset $\mathcal{M}$ com membros de A tem a forma $\mathcal{M} = \langle X, f\rangle$ para algum $X \subseteq A$ e $f : X \to \mathbb{N}_{>0}$. Então $\mathcal{M} \in \wp A \times (A \rightharpoonup \mathbb{N}_{>0})$ e construimos o conjunto de todos os multisets com membros de A usando o ZF4:

$$\text{Multisets}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{M} \in \wp A \times (A \rightharpoonup \mathbb{N}_{>0}) \mid \mathcal{M} \text{ é um multiset.}\}$$

Para mostrar que o $\wp A \times (A \rightharpoonup \mathbb{N} \setminus \{0\})$ é um conjunto, precisamos os operadores $\wp$, $\times$, $\rightharpoonup$, $\setminus$, e o próprio $\mathbb{N}$, que já temos construido pelos ZF1–ZF7.

(60) # B

(24) **B1.** Sejam a, b, c, d conjuntos. Mostre pelos axiomas ZF que os seguintes também são:

$$\begin{aligned}
A &= \{a, b, c, d\}\\
B &= \{a, b, \{c, d\}\}\\
C &= \{x \mid x \subseteq a \cup b \cup c \cup d \;\;\&\;\; x \text{ tem exatamente 2 membros}\}
\end{aligned}$$

Prova.

Como a, b são conjuntos, pelo Pairset o $\{a, b\}$ também é. Similarmente o $\{c, d\}$ é conjunto, e aplicando mais uma vez o Pairset neles temos que o $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ é conjunto. Agora aplicando o Union nele o ganhamos o A.

Aqui uma construção do B pelos axiomas, em forma de árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \qquad b}{\{a,b\}}\;\mathrm{ZF3} \qquad \dfrac{\dfrac{c \qquad d}{\{c,d\}}\;\mathrm{ZF3}}{\{\{c,d\}\}}\;\mathrm{ZF3}}{\{\{a,b\},\{\{c,d\}\}\}}\;\mathrm{ZF3}}{\{a,b,\{c,d\}\}}\;\mathrm{ZF6}$$

Para o C, usamos o Separation (ZF4) no $\wp\left(\bigcup A\right)$, que é conjunto graças aos Union (ZF6) & Powerset (ZF5):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A}{\bigcup A}\;\mathrm{ZF6}}{\wp\bigcup A}\;\mathrm{ZF5}}{C}\;\mathrm{ZF4}$$

Na aplicação de ZF4 usamos a fórmula $\exists u \exists v\,(u \neq v \wedge \forall w (w \in x \leftrightarrow w = u \vee w = v))$.

(36) **B2.** Mostre que podemos tirar o Separation (ZF4) da ZF "sem perder nada". Ou seja, dado conjunto A e fórmula $\varphi(x)$, construa pelo resto dos axiomas o conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$.
PROVA.

Seja A conjunto e $\varphi(x)$ fórmula. Definimos a class-function

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{se } \varphi(x) \\ \emptyset & \text{se não.} \end{cases}$$

Agora aplicamos o Replacement com essa class-function no conjunto A, ganhando assim como conjunto o $\Phi[A]$, cujos elementos são exatamente os *singletons* $\{a\}$ de todos os $a \in A$ que satisfazem a $\varphi(a)$, e o $\emptyset$. Usando o ZF6 chegamos no $\bigcup \Phi[A]$ que realmente é o desejado $\{a \in A \mid \varphi(a)\}$.

(64) **C**

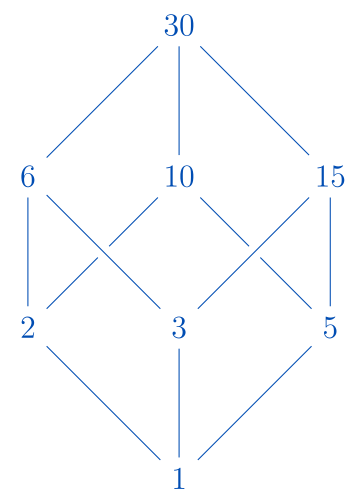
Para $n \in \mathbb{N}$, definimos o poset $\mathcal{D}_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle D_n \,;\, | \rangle$ onde $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}$.

(16) **C1.** Desenha o diagrama Hasse de $\mathcal{D}_{30}$.

DIAGRAMA.

Primeiramente calculamos:

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}\,.$$

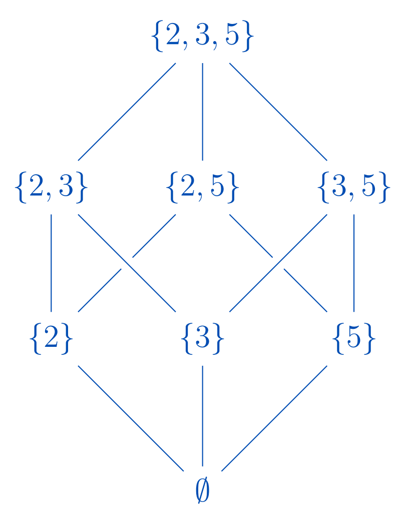


(16) **C2.** Ache conjunto A tal que $\mathcal{D}_{30} \cong \langle \wp A \,;\, \subseteq \rangle$, e defina um isomorfismo $\varphi : D_{30} \to \wp A$.

RESPOSTA.

Tome o $A = \{2, 3, 5\}$ e defina a função $\varphi : \wp A \to D_{30}$ pelas equações:

$$\begin{aligned}
\varphi(30) &= A \\
\varphi(15) &= \{3, 5\} \\
\varphi(10) &= \{2, 5\} \\
\varphi(6) &= \{2, 3\} \\
\varphi(2) &= \{2\} \\
\varphi(3) &= \{3\} \\
\varphi(5) &= \{5\} \\
\varphi(1) &= \emptyset
\end{aligned}$$



(Obs: qualquer conjunto A com $|A| = 3$ serve!)

(16) **C3.** Existe conjunto B tal que $\mathcal{D}_0 \cong \langle \wp B \; ; \subseteq \rangle$? Se sim, ache o B e defina um isomorfismo $\varphi : D_0 \to \wp B$. Se não, prove que é impossível.

Resposta.

Não existe, pois $D_0 = \mathbb{N}$ (contável) e logo não pode ser equinúmero com o powerset de nenhum conjunto B.

(16) **C4.** Verdade ou falso? $\mathcal{D}_0 \cong \langle \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \} \; ; \subseteq \rangle$.

Prova/refutação.

Verdade, a função $\varphi : D_0 \to \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ definida pela

$$\varphi(n) = D_n$$

é um isomorfismo, pois:

$$n \mid m \iff D_n \subseteq D_m.$$

(Por que?)

(64) # D

(16) **D1.** Seja $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \vee, \wedge \rangle$ um láttice (Def. 1). Prove que:

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a.$$

PROVA.

"$\Rightarrow$": Suponha $b = a \vee b$. Calculamos

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \wedge (a \vee b) && \text{(Hyp.)} \\ &= (a \vee b) \wedge a && \text{(Com2)} \\ &= a && \text{(Abs1)} \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Similar.

(16) **D2.** Seja $\mathcal{L} = \langle L \,;\, \leq \rangle$ um poset tal que $\bigwedge H$ existe para todo $H \subseteq L$. Mostre que $\mathcal{L}$ é um lattice.

PROVA.

Sejam $x, y \in L$ Considere o $\{x, y\} \subseteq L$. Pela hipótese existe o $\inf \{x, y\}$. Então basta provar que o $\sup \{x, y\}$ também existe. Considere o conjunto U de todos os upper-bounds de $\{x, y\}$. Pela hipótese, existe o $\inf U$ e logo o $\sup \{x, y\}$ também, pois $\inf U = \sup \{x, y\}$. (Por que?)

(16 + 16$^\flat$) **D3.** Prove que podemos inferir as leis (Idem1)–(Idem2) pelas outras.

Dica: *Custa* 16$^\flat$. $a \vee (a \wedge (a \vee a))$

Prova.

Seja $a \in L$. Calculamos

$$a \vee ((a \vee a) \wedge a) = a \vee a \qquad \text{(Abs2)}$$

e também

$$\begin{aligned} a \vee ((a \vee a) \wedge a) &= ((a \vee a) \wedge a) \vee a && \text{(Com1)} \\ &= (a \wedge (a \vee a)) \vee a && \text{(Com2)} \\ &= a && \text{(Abs1)} \end{aligned}$$

Logo $a \vee a = a$.

Similarmente, $a \wedge a = a$.

(16) **D4.** O $\omega^2 + 1$ é bem ordenado.

Dica: *Lembre-se que usamos a ordem (anti)lexicográfica nos produtos. Tome A tal que $\emptyset \neq A \subseteq \omega^2 + 1$ e ache se u mínimo. Separe casos dependendo se $A = \{\top\}$ ou não, onde $\top$ o máximo elemento do $\omega^2 + 1$.*

Prova.

Seja $A \subseteq \omega^2 + 1$ com $A \neq \emptyset$. Temos a seguinte ordem no $\omega^2 + 1$:

$$\underbrace{\underbrace{\langle 0,0\rangle < \langle 1,0\rangle < \langle 2,0\rangle < \cdots}_{\omega} < \underbrace{\langle 0,1\rangle < \langle 1,1\rangle < \langle 2,1\rangle < \cdots}_{\omega} < \cdots}_{\omega^2} < \top.$$

Caso $A = \{\top\}$: $\min A = \top$.

Caso $A \neq \{\top\}$: Como $A \neq \emptyset$, concluimos que $A \cap \omega^2 \neq \emptyset$. Sejam:

$$\begin{aligned} y_0 &:= \min \{y \in \mathbb{N} \mid (\exists x \in \mathbb{N})[\langle x, y\rangle \in A]\} \\ x_0 &:= \min \{x \in \mathbb{N} \mid \langle x, y_0\rangle \in A\} \end{aligned}$$

(Os dois min existem graças ao PBO do $\mathbb{N}$.) Facilmente, $\min A = \langle x_0, y_0\rangle$.

Só isso mesmo.