FMC2, 2017.1
(Turma ♣T56♣ do Thanos)

Prova 2
(points: 108/100; bonus: $0^\flat$; time: 90')

Nome:

09/06/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.[3]

XII. Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ para resolver.[4]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas em mais que 3 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G\ ;\ e, *\rangle$ é um *grupo* sse:

$$(\forall a, b \in G)\,[\, a * b \in G\,] \tag{G0}$$
$$(\forall a, b, c \in G)\,[\, a * (b * c) = (a * b) * c\,] \tag{G1}$$
$$(\forall a \in G)\,[\, e * a = a = a * e\,] \tag{G2}$$
$$(\forall a \in G)\,(\exists a' \in G)\,[\, a' * a = e = a * a'\,] \tag{G3}$$

Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Um conjunto estruturado $\mathcal{R} = \langle R\ ;\ 0, +, \cdot\rangle$ é um *anel* sse:

$$(\forall x, y \in R)\,[\, x + y \in R\,] \tag{A0}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x + (y + z) = (x + y) + z\,] \tag{A1}$$
$$(\forall x \in R)\,[\, 0 + x = x = x + 0\,] \tag{A2}$$
$$(\forall x \in R)\,(\exists x' \in R)\,[\, x' + x = 0 = x + x'\,] \tag{A3}$$
$$(\forall x, y \in R)\,[\, x + y = y + x\,] \tag{A4}$$
$$(\forall x, y \in R)\,[\, x \cdot y \in R\,] \tag{M0}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\,] \tag{M1}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,] \tag{DL}$$
$$(\forall x, y, z \in R)\,[\, (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x\,] \tag{DR}$$

Denotamos o inverso de $x \in R$ garantido pela (A3) com $(-x)$. Se no R existe elemento neutro da $\cdot$, o denotamos com 1 ou $1_{\mathcal{R}}$; ele é único e satisfaz:

$$(\forall x \in R)\,[\, i \cdot x = x = x \cdot i\,] \tag{M2}$$

Nesse caso chamamos o anel $\mathcal{R}$ *anel com unidade*. Se a $\cdot$ é comutativa, chamamos o $\mathcal{R}$ *anel comutativo*.

Definição 3. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \overset{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \qquad\qquad AB \overset{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A,\ b \in B\} \qquad\qquad \ldots\text{etc.}$$

Definição 4. Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A\ ;\ e_A, \cdot_A\rangle$ para o grupo $\langle B\ ;\ e_B, \cdot_B\rangle$ é uma função $\varphi : A \to B$ tal que para todo $x, y \in A$, $\varphi\,(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$.

Definição 5. Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G \ &\overset{\text{def}}{\iff} \text{ para todo } g \in G \text{ e } n \in N,\ gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{ para todo } g \in G,\ gN = Ng \end{aligned}$$

(36) **A**

(18) **A1.** Dado um grupo G, definimos seu *centro* $Z(G)$ como o conjunto dos membros de G que "comutam" com todos os elementos de G:

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in G \mid \text{para todo } g \in G,\ zg = gz\}$$

Mostre que $Z(G) \leq G$.

PROVA.

(18) **A2.** Seja G grupo e $\emptyset \neq H \subseteq G$. Prove que:

$$H \leq G \iff \text{para todo } a, b \in H,\ ab^{-1} \in H.$$

PROVA.

(36) **B**

Seja G grupo e denota com $\mathrm{Aut}(G)$ o conjunto estruturado de todos os automorfismos do G, com operação a $\circ$. Sabendo que $\mathrm{Bij}(G) \overset{\text{def}}{=} \langle (G \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow G) \; ; \circ \rangle$ é um grupo, mostre que

$$\mathrm{Aut}(G) \leq \mathrm{Bij}(G).$$

Dica: Se F é injetora, então $x = y \impliedby F(x) = F(y)$.

Prova.

(36) **C**

Sejam A e B grupos. Se φ homomorfismo de A para B, definimos

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \varphi(x) = e_B\}\,.$$

Mostre que:

(18) **C1.** $\ker\varphi \leq A$

Prova.

(18) **C2.** $\ker\varphi \trianglelefteq A$

Prova.

(36) **D**

Sejam G grupo, $a \in G$, e $m \in \mathbb{Z}$. Prove que:

$$a^m = e \iff o(a) \mid m$$

onde $o(a)$ denota a ordem de a no G.

PROVA.

(36) **E**

(18) **E1.** Prove/refuta a afirmação: *Se G é um grupo e $H, K \leq G$, então:*

$$HK = KH \implies HK \leq G.$$

PROVA/REFUTAÇÃO.

(18) **E2.** Seja $\langle R\,;\, 0, +, \cdot \rangle$ anel. Prove que:

(i) $0x = 0 = x0$; (ii) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$; (iii) $(-x)(-y) = xy$.

PROVA.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho

RASCUNHO

Rascunho