
Nome:

09/06/2017

Regras:

- I. Não vires esta página antes do começo da prova.
- II. Nenhuma consulta de qualquer forma.
- III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).¹
- IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.
- V. $\forall x(\text{Colar}(x) \rightarrow \neg \text{Passar}(x, \text{FMC2}))$.²
- VI. Use caneta para tuas respostas.
- VII. Responda dentro das caixas indicadas.
- VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.
- IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.
- X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.
- XI. Os pontos bônus serão considerados apenas para quem conseguir passar sem.³
- XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D, E para resolver.⁴

Boas provas!

¹Ou seja, *desligue antes* da prova.

²Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

³Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

⁴Provas com respostas em mais que 3 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Lembre-se:

Definição 1. Um conjunto estruturado $\mathcal{G} = \langle G ; e, * \rangle$ é um *grupo sse*:

$$(\forall a, b \in G) [a * b \in G] \quad (\text{G0})$$

$$(\forall a, b, c \in G) [a * (b * c) = (a * b) * c] \quad (\text{G1})$$

$$(\forall a \in G) [e * a = a = a * e] \quad (\text{G2})$$

$$(\forall a \in G) (\exists a' \in G) [a' * a = e = a * a'] \quad (\text{G3})$$

Denotamos o inverso de $a \in G$ garantido pela (G3) com a^{-1} ou $(-a)$, dependendo se usamos notação multiplicativa ou aditiva para o grupo.

Definição 2. Um conjunto estruturado $\mathcal{R} = \langle R ; 0, +, \cdot \rangle$ é um *anel sse*:

$$(\forall x, y \in R) [x + y \in R] \quad (\text{A0})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x + (y + z) = (x + y) + z] \quad (\text{A1})$$

$$(\forall x \in R) [0 + x = x = x + 0] \quad (\text{A2})$$

$$(\forall x \in R) (\exists x' \in R) [x' + x = 0 = x + x'] \quad (\text{A3})$$

$$(\forall x, y \in R) [x + y = y + x] \quad (\text{A4})$$

$$(\forall x, y \in R) [x \cdot y \in R] \quad (\text{M0})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z] \quad (\text{M1})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z] \quad (\text{DL})$$

$$(\forall x, y, z \in R) [(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x] \quad (\text{DR})$$

Denotamos o inverso de $x \in R$ garantido pela (A3) com $(-x)$. Se no R existe elemento neutro da \cdot , o denotamos com 1 ou $1_{\mathcal{R}}$; ele é único e satisfaz:

$$(\forall x \in R) [i \cdot x = x = x \cdot i] \quad (\text{M2})$$

Nesse caso chamamos o anel \mathcal{R} *anel com unidade*. Se a \cdot é comutativa, chamamos o \mathcal{R} *anel comutativo*.

Definição 3. Sejam G grupo $g \in G$, e $A, B \subseteq G$. Definimos

$$gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\} \quad AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab \mid a \in A, b \in B\} \quad \dots \text{etc.}$$

Definição 4. Um *homomorfismo* φ do grupo $\langle A ; e_A, \cdot_A \rangle$ para o grupo $\langle B ; e_B, \cdot_B \rangle$ é uma função $\varphi : A \rightarrow B$ tal que para todo $x, y \in A$, $\varphi(x \cdot_A y) = \varphi(x) \cdot_B \varphi(y)$.

Definição 5. Um subgrupo $N \leq G$ é *subgrupo normal* de G sse

$$\begin{aligned} N \trianglelefteq G &\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{para todo } g \in G \text{ e } n \in N, \quad gng^{-1} \in N \\ &\iff \text{para todo } g \in G, \quad gN = Ng \end{aligned}$$

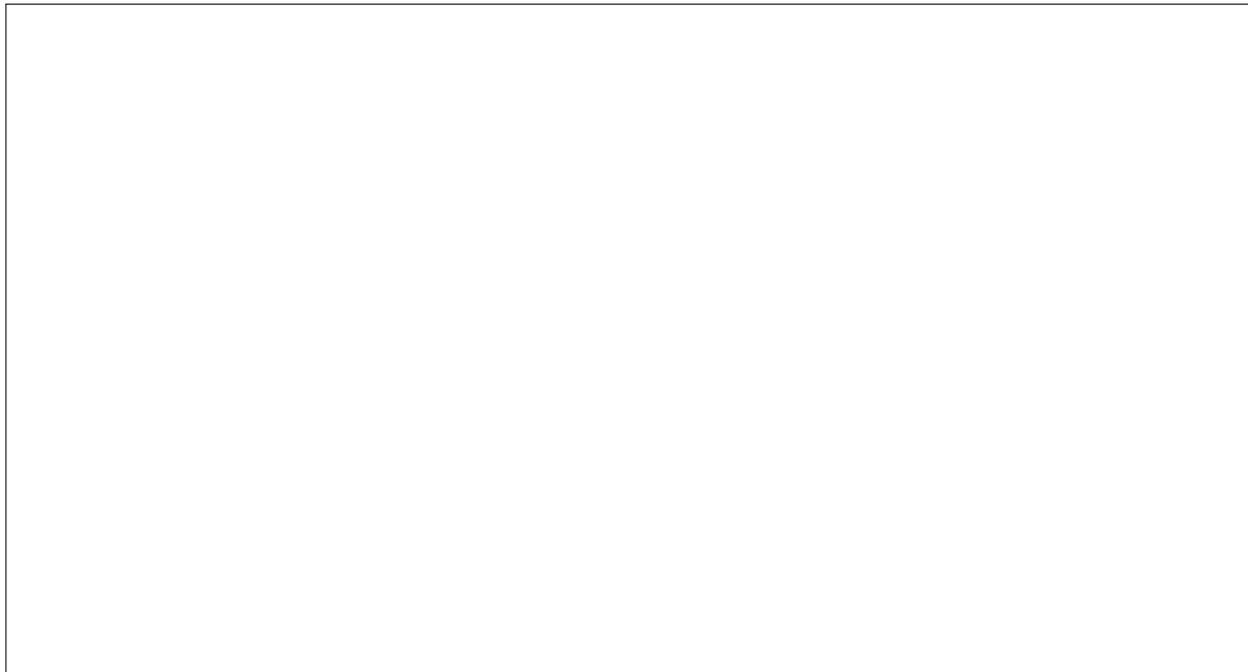
(36) **A**

Seja G grupo e $H \leq G$. Defina:

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} ab^{-1} \in H.$$

(18) **A1.** Prove que \sim é uma relação de equivalência.

PROVA.

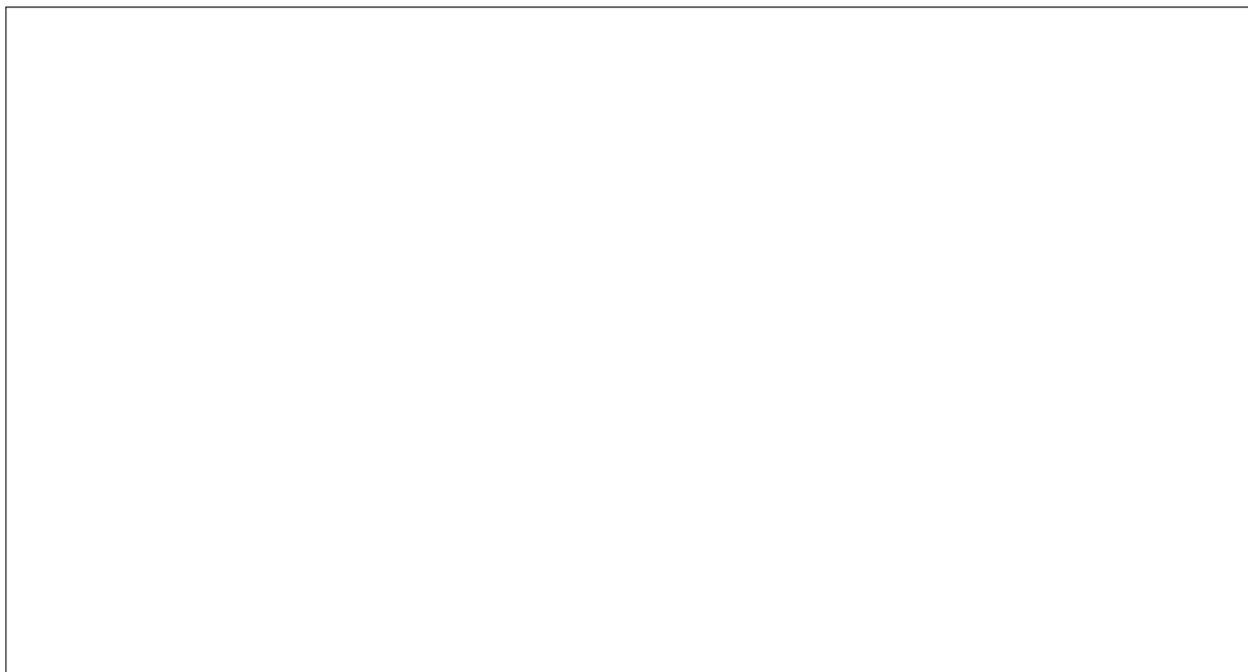


(18) **A2.** Prove que para todo $a, b \in G$:

(i) se $a \in H$ e $b \in H$, então $a \sim b$;

(ii) se $a \in H$ e $b \notin H$, então $a \not\sim b$.

PROVA.



(36) **B**

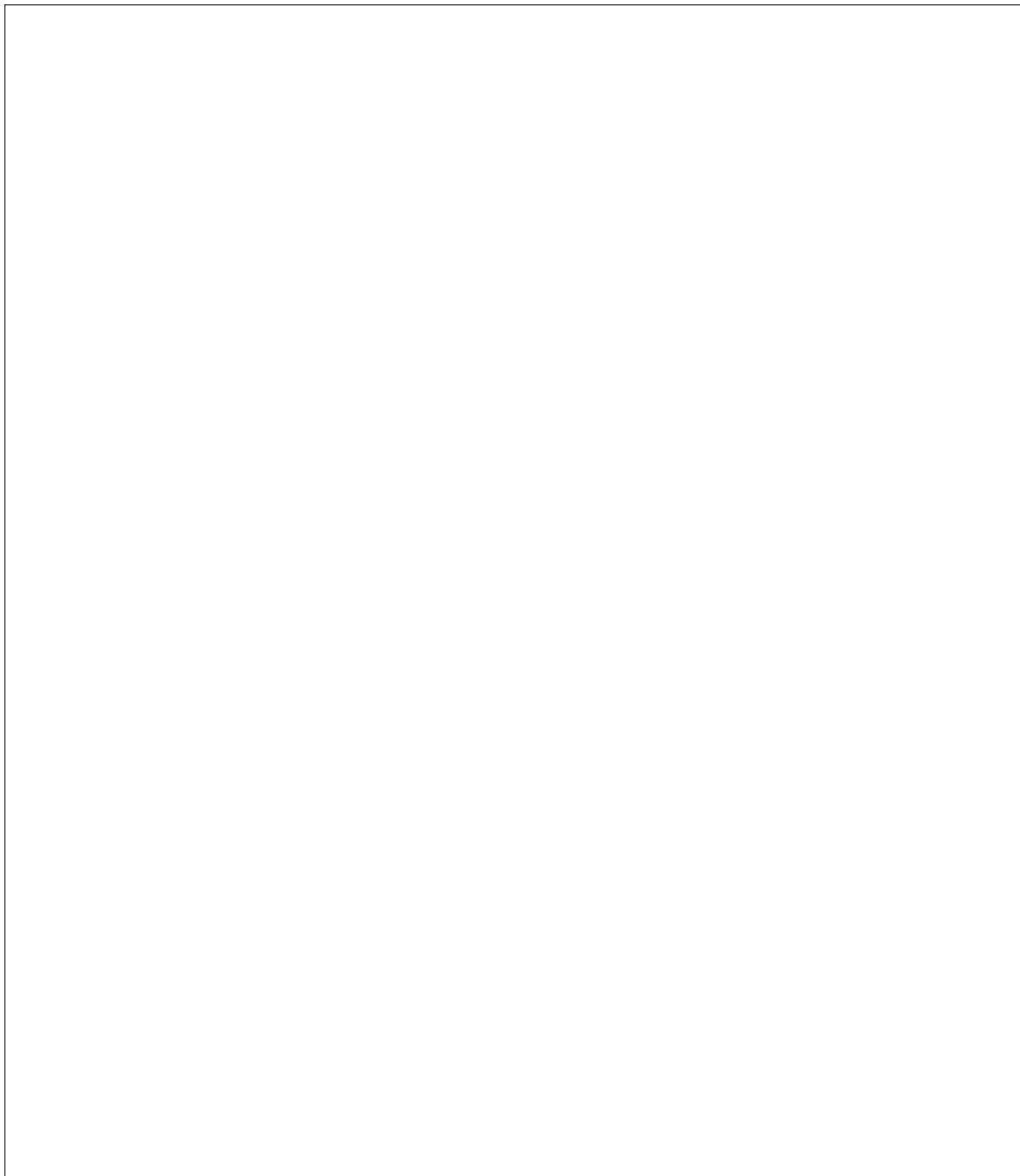
Um anel $\langle B ; 0, +, \cdot \rangle$ com unidade é *booleano* sse $p^2 = p$ para todo $p \in B$. Prove que:

(18) (i) $p + p = 0$ para todo $p \in B$;

(18) (ii) B é um anel comutativo.

Dica: Calcule o $(p + q)^2$.

PROVA.



(36) **C**

(18) **C1.** Sejam A e B grupos. Prove que se φ é um homomorfismo de A para B , então:

(i) $\varphi(e_A) = e_B$

(ii) $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

PROVA.

(18) **C2.** Considere os grupos $\mathbf{R} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\} ; \cdot \rangle$ e $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z} ; + \rangle$. Denota seus subgrupos cíclicos gerados por 2 com $\langle 2 \rangle_{\mathbf{R}}$ e $\langle 2 \rangle_{\mathbf{Z}}$ respectivamente. Ache um isomorfismo entre os $\langle 2 \rangle_{\mathbf{R}}$ e $\langle 2 \rangle_{\mathbf{Z}}$ (e prove que realmente é isomorfismo).

RESPOSTA & PROVA.

(36) **D**

Seja G grupo e $N \trianglelefteq G$. Prove que o conjunto G/N de todos os right cosets⁵ de N com a operação \bullet definida pela

$$(Na) \bullet (Nb) \stackrel{\text{def}}{=} (Na)(Nb)$$

é um grupo.

PROVA.

⁵coclasses à direita

(36) **E**

(18) **E1.** Prove/refuta a afirmação: *Se G é um grupo e $H_1, H_2 \leq G$, então $H_1 \cup H_2 \leq G$.*

PROVA/REFUTAÇÃO.

(18) **E2.** Sejam G grupo e \mathcal{H} uma família não vazia de subgrupos de G . Prove que:

$$\bigcap \mathcal{H} \leq G.$$

PROVA.

Só isso mesmo.

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO

RASCUNHO