FMC2, 2017.1
(Turma ♠N12♠ do Thanos)

Prova 1.2
(points: 72/100; bonus: 16$^\flat$; time: 100')

Nome:

08/05/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. **Escolha até 3 dos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ para responder.**[4]

Lembre-se:

$$\mathcal{P}A \overset{\text{def}}{=} \text{O conjunto de partes de } A \qquad A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \text{Os } A,\ B \text{ são equinúmeros}$$

$$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\} \qquad A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\,(C \subseteq B \ \land\ A =_{\mathrm{c}} C)$$

$$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \qquad f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função injetora de } A \text{ para } B$$

$$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} \qquad f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função sobrejetora de } A \text{ para } B$$

$$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\} \qquad f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ é função bijetora de } A \text{ para } B$$

Podes usar as seguintes equinumerosidades sem as provar:

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Z} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Q} =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}_{\mathrm{f}}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2 =_{\mathrm{c}} (0,1) =_{\mathrm{c}} [0,1] =_{\mathrm{c}} [0,1) =_{\mathrm{c}} (0,1] =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2})$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.

[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

[4] Provas com respostas nas 4 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(8) **A1.** Defina a relação $=_c$ de equinumerosidade entre conjuntos, e o fecho reflexivo-simétrico R' duma relação binária R.
DEFINIÇÕES.

$$A =_c B \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{}$$

$$x \; R' \; y \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{}$$

(16) **A2.** Prove que se $A \neq \emptyset$, então:

$$A \leq_c B \iff (\exists g)[g : B \twoheadrightarrow A]$$

PROVA.

(24) # B

(12) **B1.** Chamamos o conjunto C *cofinito* no conjunto A sse $A \setminus C$ é finito.
Para qualquer conjunto A definimos

$$\mathcal{P}_{\mathrm{cof}} A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{C \subseteq A \mid C \text{ cofinito no } A\}.$$

Qual a cardinalidade do $\mathcal{P}_{\mathrm{cof}}\mathbb{N}$?
RESPOSTA & PROVA.

(12) **B2.** Sejam A e B conjuntos. Prove que:

$$A =_{\mathrm{c}} B \implies \mathcal{P}A =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}B$$

PROVA.

(24) **C**

(16) **C1.** Prove que

$$(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{R}.$$

PROVA.

(8) **C2.** No conjunto dos reais $\mathbb{R}$, defina três relações de equivalência $\sim_1$, $\sim_2$, $\sim_3$, diferentes da igualdade $=$ e da trivial True, tais que:

(i) $\mathbb{R}/{\sim_1} <_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{R}/{\sim_2} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$ (iii) $\mathbb{R}/{\sim_3} >_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$.

Para cada uma, descreva seu conjunto quociente.

DEFINIÇÕES & DESCRIÇÕES.

$(24 + 16^\flat)$ **D**

Defina as relações seguintes no $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ assim:

$$
\begin{aligned}
f \overset{z}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(0) = g(0) \\
f \overset{e}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(2n) = g(2n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\
f \overset{o}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(2k+1) = g(2k+1) \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \\
f \overset{\infty}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(n) = g(n) \text{ para uma infinidade de } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

(12) **D1.** Afirmação: *todas as relações em cima são relações de equivalência.*
PROVA/REFUTAÇÃO.

(12) **D2.** Quais são as cardinalidades dos conjuntos quocientes $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{z}{=}$ e $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{e}{=}$?
RESPOSTA & EXPLANAÇÃO.

($16^\flat$) **D3.** Afirmação: *a composição* $(\overset{\mathrm{e}}{=} \circ \overset{\mathrm{o}}{=})$ *é a relação trivial* True.
Prova/Refutação.

Só isso mesmo.

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho

Rascunho