FMC2, 2017.1
(Turma ♠N12♠ do Thanos)

Prova 1.2
(points: 72/100; bonus: $16^\flat$; time: 100')

Nome: Θάνος **Gabarito**

08/05/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

XII. Escolha até 3 dos A, B, C, D para responder.[4]

Lembre-se:

$\mathcal{P}A \overset{\text{def}}{=}$ O conjunto de partes de A

$\mathcal{P}_{\mathrm{f}}A \overset{\text{def}}{=} \{X \subseteq A \mid X \text{ é finito}\}$

$A^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$

$\overline{n} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$

$(A \to B) \overset{\text{def}}{=} \{f \mid f : A \to B\}$

$A =_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff}$ Os A, B são equinúmeros

$A \leq_{\mathrm{c}} B \overset{\text{def}}{\iff} \exists C\,(C \subseteq B \;\land\; A =_{\mathrm{c}} C)$

$f : A \rightarrowtail B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função injetora de A para B

$f : A \twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função sobrejetora de A para B

$f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \overset{\text{def}}{\iff} f$ é função bijetora de A para B

Podes usar as seguintes equinumerosidades sem as provar:

$$\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Z} =_{\mathrm{c}} \mathbb{Q} =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}_{\mathrm{f}}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^2 =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}^*$$
$$\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2 =_{\mathrm{c}} (0,1) =_{\mathrm{c}} [0,1] =_{\mathrm{c}} [0,1) =_{\mathrm{c}} (0,1] =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{N} =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \overline{2})$$

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.
[4] Provas com respostas nas 4 partes não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

(24) **A**

(8) **A1.** Defina a relação $=_c$ de equinumerosidade entre conjuntos, e o fecho reflexivo-simétrico R' duma relação binária R.
DEFINIÇÕES.

$$A =_c B \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{\exists f(f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)}$$

$$x\, R'\, y \overset{\text{def}}{\iff} \boxed{x = y \ \lor\ x\, R\, y\ \lor\ y\, R\, x}$$

(16) **A2.** Prove que se $A \neq \emptyset$, então:

$$A \leq_c B \iff (\exists g)[g : B \twoheadrightarrow A]$$

PROVA.

"$\Rightarrow$": Fixe um $a_0 \in A$. Pela definição da $\leq_c$, tome $C \subseteq B$ com $A =_c C$. Pela definição da $=_c$, tome $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ e define $g : B \twoheadrightarrow A$ pela

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b), & \text{se } b \in C \\ a_0, & \text{se não.} \end{cases}$$

A g é sobrejetora pois para todo $a \in A$, $g(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$.

"$\Leftarrow$": Seja $g : B \twoheadrightarrow A$ (pela hipótese). Procuramos $C \subseteq B$ tal que $A =_c C$. Para cada elemento $a \in A$, temos $g^{-1}[\{a\}] \neq \emptyset$ pois g é sobrejetora.

Então escolhe para cada $a \in A$ um $b_a \in g^{-1}[\{a\}]$; ou seja, um $b_a \in B$ tal que $g(b_a) = a$. Tome $C = \{b_a \mid a \in A\}$, e observe que pela definição de b_a, $C \subseteq B$ e $C =_c A$ como podemos ver pela restrição da g no C:

$$g{\restriction}C : C \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A.$$

(24) **B**

(12) **B1.** Chamamos o conjunto C *cofinito* no conjunto A sse $A \setminus C$ é finito.
Para qualquer conjunto A definimos

$$\mathcal{P}_{\text{cof}} A \stackrel{\text{def}}{=} \{C \subseteq A \mid C \text{ cofinito no } A\}\,.$$

Qual a cardinalidade do $\mathcal{P}_{\text{cof}}\mathbb{N}$?
RESPOSTA & PROVA.

$|\mathcal{P}_{\text{cof}}\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Os conjuntos cofinitos estão numa correspondência óbvia com os conjuntos finitos:

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{P}_{\text{f}}\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}_{\text{cof}}\mathbb{N} \\ f(A) &= \mathbb{N} \setminus A \end{aligned}$$

Então temos $\mathcal{P}_{\text{cof}}\mathbb{N} =_{\text{c}} \mathcal{P}_{\text{f}}\mathbb{N} =_{\text{c}} \mathbb{N}$.

(12) **B2.** Sejam A e B conjuntos. Prove que:

$$A =_{\text{c}} B \implies \mathcal{P}A =_{\text{c}} \mathcal{P}B$$

PROVA.

Seja $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ (pela hipótese). Procuramos $F : \mathcal{P}A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}B$. Defina

$$F(X) = f[X]$$

A F É INJETORA. Suponha $X, X' \in \mathcal{P}A$ com $X \neq X'$. Precisamos $F(X) \neq F(X')$.
Como $X \neq X'$, existe $d \in X \triangle X'$. E agora:

$$\begin{aligned} d \in X \triangle X' &\iff f(d) \in f[X \triangle X'] && \text{(def. de } f[-]) \\ &\iff f(d) \in f[X] \triangle f[X'] && (f \text{ injetora}) \\ &\iff f[X] \neq f[X'] && \text{(def. de } \triangle) \end{aligned}$$

A F É SOBREJETORA. Seja $Y \subseteq B$. Observe que

$$F\big(f^{-1}[Y]\big) = f\big[f^{-1}[Y]\big] = Y.$$

Outra solução para a parte INJETORA:

Sejam $X, X' \in \mathcal{P}A$ dois subconjuntos distintos de A ($X \neq X'$). Precisamos mostrar $F(X) \neq F(X')$. Sem perda de generalidade suponha $X \setminus X' \neq \emptyset$ e logo tome $d \in X \setminus X'$. Então $f(d) \in f[X \setminus X'] = f[X] \setminus f[X']$ (f injetora). Ou seja, $f[X] \neq f[X']$.

(24) **C**

(16) **C1.** Prove que

$$(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{R}.$$

PROVA.

Graças o teorema Schröder–Bernstein, basta mostrar as:

$(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \leq_{\mathrm{c}} \mathcal{P}\mathbb{R}$:

Pelo **B2**, como $\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathbb{R}^2$, temos $\mathcal{P}\mathbb{R} =_{\mathrm{c}} \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Então vamos mostrar

$$(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \leq_{\mathrm{c}} \mathcal{P}(\mathbb{R}^2).$$

A função que manda cada função real para seu gráfico é obviamente injetora:

$$\begin{aligned} F &: (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \rightarrowtail \mathcal{P}\mathbb{R} \\ F(f) &= \mathrm{Graph}(f) = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}\mathbb{R} \leq_{\mathrm{c}} (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$:

A função que manda cada subconjunto de reais para sua função carateristica é obviamente injetora:

$$\begin{aligned} G &: \mathcal{P}\mathbb{R} \rightarrowtail (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \\ G(A) &= \chi_A \end{aligned}$$

(8) **C2.** No conjunto dos reais $\mathbb{R}$, defina três relações de equivalência $\sim_1$, $\sim_2$, $\sim_3$, diferentes da igualdade $=$ e da trivial True, tais que:

(i) $\mathbb{R}/{\sim_1} <_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$ (ii) $\mathbb{R}/{\sim_2} =_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$ (iii) $\mathbb{R}/{\sim_3} >_{\mathrm{c}} \mathbb{N}$.

Para cada uma, descreva seu conjunto quociente.

DEFINIÇÕES & DESCRIÇÕES.

Cada relação de equivalência corresponde numa partição e vice-versa, então descrevemos as três partições diretamente:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &= \big\{\, (-\infty, 0), \{0\}, (0, +\infty) \,\big\} \\ \mathscr{C}_2 &= \big\{\, [n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z} \,\big\} \\ \mathscr{C}_3 &= \big\{\, \{a\} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,\big\} \cup \big\{\, \mathbb{Q} \,\big\} \end{aligned}$$

alternativamente
sem usar partições

$$\begin{cases} x \sim_1 y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \text{ ou } xy > 0 \\ x \sim_2 y \overset{\text{def}}{\iff} \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \\ x \sim_3 y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \text{ ou } x, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

As correspondentes relações então são definidas pelas:

$$x \sim_i y \overset{\text{def}}{\iff} (\exists C \in \mathscr{C}_i)\, [\, x \in C \ \land\ y \in C \,] \qquad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

$(24 + 16^\flat)$ **D**

Defina as relações seguintes no $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ assim:

$$
\begin{aligned}
f \overset{z}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(0) = g(0)\\
f \overset{e}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(2n) = g(2n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\\
f \overset{o}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(2k+1) = g(2k+1) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\\
f \overset{\infty}{=} g &\overset{\text{def}}{\iff} f(n) = g(n) \text{ para uma infinidade de } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

(12) **D1.** Afirmação: *todas as relações em cima são relações de equivalência.*
PROVA/REFUTAÇÃO.

Não, pois a $\overset{\infty}{=}$ não é, como o contraexemplo seguinte demonstra.

Sejam as $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (como seqüências):

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle\\
\beta &= \langle 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots \rangle\\
\gamma &= \langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots \rangle
\end{aligned}
$$

Trivialmente, $\alpha \overset{\infty}{=} \beta$ e $\beta \overset{\infty}{=} \gamma$ mas $\alpha \overset{\infty}{\neq} \gamma$.

(12) **D2.** Quais são as cardinalidades dos conjuntos quocientes $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{z}{=}$ e $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{e}{=}$?
RESPOSTA & EXPLANAÇÃO.

$\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$ respectivamente.

Escrevendo as partições na forma seguinte

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{z}{=} &\overset{?}{=} \big\{ \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = n \} \;\big|\; n \in \mathbb{N} \big\}\\
(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{e}{=} &\overset{?}{=} \big\{ \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N})\, [\, f(2n) = g(n)\,] \} \;\big|\; g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \big\}
\end{aligned}
$$

ficam claras as bijeções correspondentes

$$
\begin{aligned}
n &\mapsto \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = n \}\\
g &\mapsto \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N})\, [\, f(2n) = g(n)\,] \}.
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{z}{=} &=_{\mathrm{c}} \mathbb{N}\\
(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/\overset{e}{=} &=_{\mathrm{c}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

(16$^\flat$) **D3.** Afirmação: *a composição* $(\stackrel{e}{=}\circ\stackrel{o}{=})$ *é a relação trivial* True.
PROVA/REFUTAÇÃO.

Correto.

Sejam $f, g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$. Vamos mostrar que $f(\stackrel{e}{=}\circ\stackrel{o}{=})g$. Pela definição da $\circ$ temos:

$$f(\stackrel{e}{=}\circ\stackrel{o}{=})g \iff (\exists h \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}))\left[\, f \stackrel{e}{=} h \;\wedge\; h \stackrel{o}{=} g \,\right].$$

A função $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pela

$$h(n) = \begin{cases} f(n), & n \text{ par} \\ g(n), & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

satisfaz as $f \stackrel{e}{=} h \stackrel{o}{=} g$ pela sua construção. Logo, $f(\stackrel{e}{=}\circ\stackrel{o}{=})g$.

Só isso mesmo.