FMC2, 2017.1
(Turma N12 do Thanos)

Prova 1.1
(points: 28/100; bonus: $6^\flat$; time: 90')

Nome: Θάνος **Gabarito**

22/03/2017

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $\forall x\big(\mathrm{Colar}(x) \to \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\big)$.[2]

VI. Use caneta para tuas respostas.

VII. Responda dentro das caixas indicadas.

VIII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra, antes de usá-la.

IX. Entregue *todas* as folhas de rascunho extra, juntas com tua prova.

X. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo.

XI. Os pontos bônus são considerados apenas para quem consiga passar sem.[3]

Boas provas!

---

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.
[3] Por exemplo, 25 pontos bonus podem aumentar uma nota de 5,2 para 7,7 ou de 9,2 para 10,0, mas de 4,9 nem para 7,4 nem para 5,0. A 4,9 ficaria 4,9 mesmo.

(9) **A**

(3) **A1.** Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções. Defina formalmente o que significa que as funções f e g são diferentes ($f \neq g$). (Não suponha que teu leitor sabe o que significa $f = g$.)

DEFINIÇÃO.

$$f \neq g \overset{\text{def}}{\iff} A \neq C \lor (\exists x \in A)[f(x) \neq g(x)] \qquad \Big(\iff (\exists x \in A \cup C)[f(x) \neq g(x)] \Big)$$

(3) **A2.** Sejam A, B conjuntos diferentes, e $f : A \to B$. Para cada uma das igualdades em baixo,[4] decida se ela é válida ou não, justificando tua resposta.

(1) $f = f \circ \mathrm{id}_A$ (2) $f = f \circ \mathrm{id}_B$ (3) $f = \mathrm{id}_A \circ f$ (4) $f = \mathrm{id}_B \circ f$.

RESPOSTA.

(1) Válida: a composição é definida, e se $a \in A$ então:

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathrm{id}_A)(a) &= f(\mathrm{id}_A(a)) && (\text{def. } \circ)\\
&= f(a) && (\text{def. } \mathrm{id}_A)
\end{aligned}$$

(2) e (3): as composições não são definidas

(4) Similar com (1): a composição é definida e se $a \in A$ então:

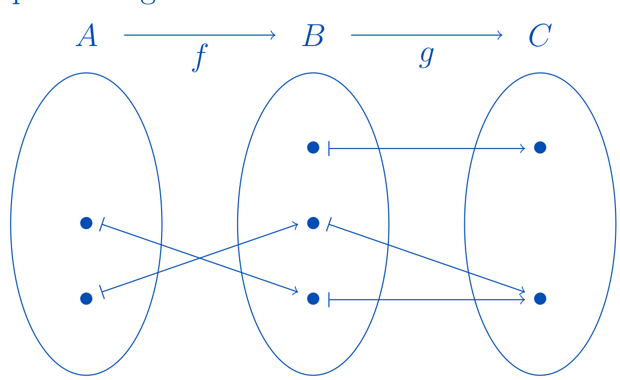
$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_B \circ f)(a) &= \mathrm{id}_B(f(a)) && (\text{def. } \circ)\\
&= f(a) && (\text{def. } \mathrm{id}_B)
\end{aligned}$$

(3) **A3.** Verdade ou falso? (Prove tua resposta.)

Se $(g \circ f)$ é constante, então pelo menos uma das f, g também é.

PROVA.

Falso. Um contraexemplo é o seguinte:



[4] Para todo conjunto C, denotamos com $\mathrm{id}_C : C \to C$ a sua identidade (tambem denotada por 1_C).

$(9 + 2^\flat)$ B

(3) **B1.** Sejam $A \neq \emptyset$ um conjunto e $f : A \to \mathcal{P}A$ definida pela equação

$$f(a) = \{a\} \qquad .$$

(1) f é injetora? (2) f é sobrejetora?
PROVAS.

(1) Sim: se $x, y \in A$, então

$$x \neq y \implies \{x\} \neq \{y\} \implies f(x) \neq f(y).$$

(2) Não: para todo $a \in A$ temos $f(a) = \{a\} \neq \emptyset \in \mathcal{P}A$.

(3) **B2.** Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$. Considere a função $\pi : I \times A^n \to A$ definida por

$$\pi(i, \alpha) = \text{o } i\text{-ésimo elemento da tupla } \alpha = \alpha_i$$

(1) π é injetora? (2) π é sobrejetora?
PROVAS.

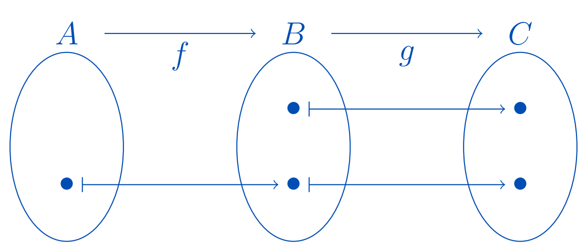
(1) Se $A \neq \emptyset$ e $n > 1$, não é: pois tomando $a \in A$,

$$\pi(0, \langle a, \dots, a \rangle) = a = \pi(1, \langle a, \dots, a \rangle).$$

…e se não?
(2) Se $A \neq \emptyset$ e $n > 1$, é: pois para qualquer $a \in A$, $\pi(0, \langle a, \dots, a \rangle) = a$. …e se não?

(3) **B3.** Se f é injetora e g sobrejetora, a $g \circ f$ é necessariamente bijetora?
PROVA.

Falso:



$(2^\flat)$ **B4.** Podemos trocar o I por $\mathbb{N}$ no $\mathrm{dom}(\pi)$ do **B2**?
RESPOSTA.

Não, pois a π vai ser mal-definida.

(10 + $4^\flat$) **C**

(10) **C1.** Sejam $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ e n conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Seja

$$A \coloneqq A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n.$$

Observe que como a operação $\triangle$ é (i) associativa e (ii) comutativa, o A é bem definido.

Prove que:

$$A = \{a \mid a \text{ pertence numa quantidade ímpar de } A_i\text{'s}\}.$$

Dica: *Indução.*

PROVA.

Provamos por indução que para todo inteiro $n \geq 2$,

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_n = \{a \mid a \text{ pertence numa quantidade ímpar de } A_i\text{'s}\}.$$

BASE ($n = 2$): $x \in A_1 \triangle A_2 \iff x$ pertence numa quantidade ímpar dos A_1, A_2 (óbvio).

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k = \{a \mid a \text{ pertence numa quantidade ímpar de } A_i\text{'s}\}. \qquad \text{(H.I.)}$$

("$\subseteq$"): Suponha que $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_{k+1}$, ou seja, $x \in (A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}$. Pela definição de $\triangle$, temos dois casos:

CASO 1: $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k$ e $x \notin A_{k+1}$.
Pela H.I., x pertence numa quantidade ímpar dos $A_1, \dots, A_k$, e não no A_{k+1}, então numa quantidade ímpar dos $A_1, \dots, A_{k+1}$.

CASO 2: $x \notin A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k$ e $x \in A_{k+1}$.
Pela H.I., x pertence numa quantidade par dos $A_1, \dots, A_k$ e no A_{k+1}, então numa quantidade ímpar dos $A_1, \dots, A_{k+1}$.

("$\supseteq$"): Suponha que x pertence numa quantidade ímpar dos $A_1, \dots, A_{k+1}$. Separamos dois casos:

CASO 1: $x \in A_{k+1}$. Logo x pertence numa quantidade par dos $A_1, \dots, A_k$ e pela H.I. concluimos que $x \notin A_1 \triangle \cdots \triangle A_k$. Ou seja, $x \in (A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}$.

CASO 2: $x \notin A_{k+1}$. Nesse caso x pertence numa quantidade ímpar dos $A_1, \dots, A_k$ e pela H.I. temos que $x \in A_1 \triangle \cdots \triangle A_k$. De novo, $x \in (A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}$.

($4^\flat$) **C2.** O que devemos mudar (e como) no **C1** e sua resposta, se apagar o "$n \geq 2$"?

RESPOSTA.

Precisamos verificar que a expressão $A_1 \triangle \cdots \triangle A_n$ faz sentido no caso que $n = 0$, ou seja, definir razoavelmente a diferença simétrica de uma seqüência vazia de conjuntos. Formalmente verificamos que $\emptyset \triangle C = C = C \triangle \emptyset$ para qualquer conjunto C: $\emptyset$ é o elemento neutro da operação $\triangle$, e logo o valor próprio da expressão em cima.

Na prova, a base muda para $n = 0$, onde devemos apenas provar que nenhum a pertence numa quantidade ímpar dos (zero) A_i's, que é óbvio.

Só isso mesmo.