FMC2, 2024.1
(Turma T12 do Thanos)

Prova CFR1.2
(points: 62; bonus: $0^\flat$; time: 62')

Nome:

2024-05-03

Regras:

I. Não vires esta página antes do começo da prova.

II. Nenhuma consulta de qualquer forma.

III. Nenhum aparelho ligado (por exemplo: celular, tablet, notebook, *etc.*).[1]

IV. Nenhuma comunicação de qualquer forma e para qualquer motivo.

V. $(\forall x)\,[\,\mathrm{Colar}(x) \implies \neg\mathrm{Passar}(x, \mathrm{FMC2})\,]$.[2]

VI. Responda dentro das caixas indicadas.

VII. Escreva teu nome em *cada* folha de rascunho extra *antes de usá-la.*

VIII. Nenhuma prova será aceita depois do fim do tempo—mesmo se for atraso de 1 segundo.

IX. Provas violando as restrições de escolha não serão corrigidas (tirarão 0 pontos).

Definição. Seja $f : A \to A$ um endomapa num conjunto A. Chamamos *fixpoint* da f qualquer $x \in A$ tal que $f\ x = x$.

Boas provas!

[1] Ou seja, *desligue antes* da prova.
[2] Se essa regra não faz sentido, melhor desistir desde já.

(16) I

Explique porque a $F : \alpha \times \alpha \times \beta \to \alpha \times \beta \times \alpha$ definida pela

$$F\ (a, a', b) = (a, b, a)$$

não serve para estabelecer o isomorfismo $\alpha \times \alpha \times \beta \cong \alpha \times \beta \times \alpha$.
RESPOSTA.

(15) R

*Escolha **uma** das **R1**, **R2***

R1. Seja $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida pelas

$$\begin{aligned} b(0) &= 0 \\ b(1) &= 1 \\ b(n) &= b(n-1) + b(n-2), \quad \text{para todo } n > 1. \end{aligned}$$

Mostre que visto como sistema de equações na incógnita b há no máximo uma resolução.

R2. Seja $f : A \to A$. Demonstre a afirmação:

$$x \text{ é um fixpoint da } f \iff \text{para todo } n \in \mathbb{N}, x \text{ é um fixpoint da } f^n.$$

DEMONSTRAÇÃO DA ________ .

(15) **T**

Usando apenas as $\langle \_, \_ \rangle$, $[\_ \mid \_]$, $(+)$, $(\cdot)$ como primitivas, defina sem pontos a função

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\ x = x^3 + 2x.$$

Tente ficar fiel na sua intensão e definir funções auxiliares interessantes (se tiver).
DEFINIÇÃO.

(16) **F**

Sejam $f : X \to Y$, e $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$.
F1. Demonstre: $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ $B \supseteq f[f^{-1}[B]]$.
DEMONSTRAÇÃO.

F2. Mostre que, em geral, não podemos concluir as

$$A = f^{-1}[f[A]] \qquad\qquad B = f\left[f^{-1}[B]\right].$$

RESOLUÇÃO.

Só isso mesmo.

Rascunho